

Modélisation numériques et mathématiques de l'écoulement du plasma chaud à l'intérieur d'une conduite cylindrique rigide

R.HACHIMI, K. GUERAOU, M. TAIBI, M. DRIOUICH, M. SAMMOUDA

Team of modelling and simulating in mechanics and energetic, Faculty of sciences, Mohammed V University, Rabat B.P. 1014, Rabat, Morocco
kgueraoui@yahoo.fr

Résumé

L'objet de cette étude est de mettre en œuvre des outils mathématiques et numériques pour la modélisation et la simulation numérique du plasma chaud dans une conduite cylindrique rigide.

Les équations qui gouvernent ce problème sont les équations de continuité, quantité de mouvement et l'énergie couplée avec les équations électromagnétiques. Ce système traduit la description Magnétohydrodynamique du plasma et Le couplage se fait à travers le terme forces de Laplace.

Le système d'équations aux dérivées partielles issu de ce modèle physique est un système non linéaire d'équations aux dérivées partielles ils vont être résolue numériquement à l'aide des Méthode des volumes finis. C'est une méthode de discrétisation performante, elle consiste à utiliser une approximation simple de l'inconnu pour transformer les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. Dans cette méthode, le domaine de calcul est subdivisé en un certain nombre de volumes de contrôle (volumes finis) non superposés, tel que chaque volume entoure un point de maillage. Ensuite L'équation différentielle est intégrée dans un volume de contrôle élémentaire.

Le résultat de cette intégration donne une équation algébrique. Cette équation exprime le principe de conservation de la fonction sur le volume de contrôle, et la solution est obtenue par la résolution numérique donc il faut avoir recours à la reformulation de l'équation au moyen de la méthode des volumes finis et son emploi dans le programme FORTRAN.

Mots clés : plasma chaud, magnétohydrodynamique (MHD), Métal liquide, modélisation numérique, convection naturelle, méthode volumes finis.

1. Formulation mathématique

L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'action d'un champ magnétique uniforme et constant sur l'écoulement des fluides électro-conducteurs (plasma). Nous considérons, plus exactement l'écoulement d'un fluide électriquement conducteur dans une cavité cylindrique caractérisée géométriquement par son rapport de forme défini de la hauteur sur le

diamètre $\left(A = \frac{H}{D} \right)$. Les températures sont maintenues

constantes aux deux extrémités avec une température en bas supérieure à celle d'en haut, et les parois latérales sont supposées adiabatique. Electriquement, toutes les parois sont isolantes. Le fluide est considéré comme newtonien et sa densité est supposée varier linéairement avec la température dans le terme de force de gravité (approximation de Boussinesq) [1], [2], [3].

1.1 Equation de continuité

La loi de continuité exprime la conservation de masse de l'écoulement du fluide. C'est-à-dire le fait qu'il n'y a ni création ni destruction de masse pendant le mouvement des fluides.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r.u] + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

1.2 Équation de quantité de mouvement

L'approximation de Boussinesq suppose que la densité soit constante partout, sauf dans le terme de force de gravité ou elle varie linéairement avec la température :

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0))$$

Ici α désigne le coefficient d'expansion thermique. D'où l'équation de quantité de mouvement s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} = \alpha(T - T_0) g \vec{e}_z - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Avec :

\vec{v} : Vecteur vitesse fluides.

\vec{B} : Induction magnétique.

\vec{j} : Densité du courant.

μ : viscosité dynamique du fluide.

ρ : Densité de charge volumique.

P : Pression

L'équation adimensionnelle en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) + f_r$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{Ra}{Pr} T + f_z$$

Avec :

Champ magnétique axial

$$f_r = -Ha_r^2 \cdot u$$

$$f_z = 0$$

Champ magnétique radial

$$f_r = 0$$

$$f_z = -Ha_r^2 \cdot w$$

1.3 Equation de l'énergie

Cette équation se fonde sur le bilan énergétique d'un gaz homogène et visqueux dans un volume arbitraire v immobile dans l'écoulement et de surface extérieure perméable.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u \cdot T) + \frac{\partial}{\partial z} (w \cdot T) = \frac{1}{Pr} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

1.4 Equation électromagnétique

L'équation électromagnétique en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A^*}{\partial t} = -J_s$$

Avec A vecteur potentiel magnétique.

C'est une équation aux dérivées partielles, qui décrit le comportement magnétodynamique d'un dispositif axisymétrique.

1.5 Couplage vitesse-pression

Les équations des composantes de quantités de mouvement sont couplées par la pression qui agit par les composantes de son gradient, or nous ne disposons pas d'équation propre à cette variable. L'idée de Patankar et Spalding consiste à utiliser l'équation de continuité pour obtenir le champ de pression, car si le bon champ de pression est pris en compte dans le traitement des équations des quantités de mouvement, alors les vitesses obtenues vérifient l'équation de continuité. Donc cette dernière apparaît comme une contrainte à vérifier par le champ de pression [4].

Alors pour diriger la liaison vitesse-pression on considère l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations)

$$a_{i,j} u_{i,j}^* = \sum a_{vs} u_{vs}^* + (p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j}$$

$$a_{i,j} v_{i,j}^* = \sum a_{vs} v_{vs}^* + (p_{i,j-1}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j}$$

On définit la correction de la pression p' comme la différence entre la pression correcte p et la pression estimée p^* :

$$p = p^* + p'$$

De façon similaire on définit la correction des vitesses u' et v' comme la différence entre les vitesses correctes u, v et les vitesses estimées u^*, v^* :

$$u = u^* + u'$$

$$v = v^* + v'$$

2. Méthode de Résolution

Les écoulements de fluides sont décrits par le système d'équations aux dérivées partielles pratiquement impossible de trouver une solution analytique et exacte à de tel système du fait que les équations citées précédemment soient très complexes, c'est à dire non - linéaires d'une part et couplées d'une autre part. Dans ce cas, le recours à la résolution numérique s'impose et nous incite à choisir la méthode numérique adéquate pour obtenir les meilleures approximations. [5] Nous avons opté à l'utilisation de la méthode des volumes finis et la méthode de double balayage implicite. La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation bien adapté à la résolution numérique des équations de conservation.

3 RÉSULTATS

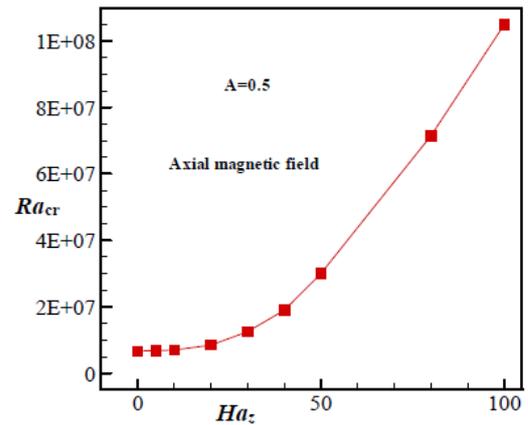


Figure 1: diagramme de stabilité Ra-Ha pour un rapport de diamètre $A=0,5$.

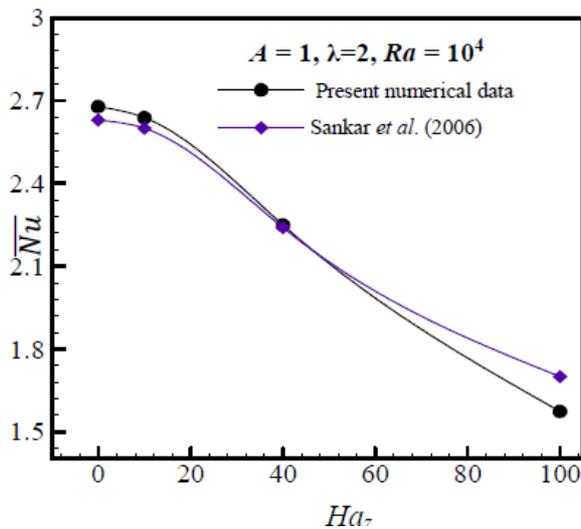


Figure 2: Taux moyen de transfert de chaleur pour différentes valeurs de Ha .

La source de chaleur interne augmente l'intensité de la circulation de l'écoulement, favorise l'apparition du régime multicellulaire et augmente la température en haut de la cavité. Et le champ magnétique a un effet plus important dans la direction radiale par rapport à la direction axiale. [6]

CONCLUSION

Une étude numérique d'un écoulement engendré par deux disques, à l'intérieur d'une enceinte remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0,015$) métal liquide, soumise à un gradient de température et un champ magnétique orienté verticalement ou axial, a été faite. Un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis a été utilisé pour résoudre numériquement les équations gouvernant le phénomène étudié.

Une validation du code de calcul a été faite, par comparaisons de ces résultats avec des données numériques trouvées dans la littérature.

Nos simulations numériques ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann $Ha=0$ à 100 et les résultats obtenus montrent l'effet du champ magnétique sur l'instabilité de l'écoulement.

Références

- [1] A.J. CHORIN « Numerical solution of the Navier-Stokes equations », *Math. Comp.* 22, 1968.
- [2] F.H HARLOW « Welch J.E., Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow » *Physics of fluids*, 8:21-82, 1965.
- [3] C. HIRSCH « Numerical computation of internal and external flows, John Wiley and sons, 1990.
- [4] S.V.Patankar, « Numerical heat transfer and fluid flow », Hemisphere. Washington, DC, 1980.
- [5] H.EL-TOURROUG, KAMAL GUERAOU, N. HASSANAIN, M. DRIOUICH, S. MEN-LA-YAKHAF. « Numerical Modeling of the Phenomenon of Crystallization of Incompressible Fluid Flows into Rigid Pipes. Application to Polymer Melts ». *International Review on Modeling and Simulations (IREMOS)*, (2015), 8 (1), pp. 99-103.
- [6] Mebarek-Oudina, F. and R. Bessaih (2014a). « Numerical Modeling of MHD stability in a cylindrical configuration ». *Journal of the Franklin Institute* 351(2), 667-681.