Ballottement d'un liquide parfait hétérogène dans un réservoir rectangulaire soumis à une excitation dynamique horizontale

H. ESSAOUINI[1], L. EL BAKKALI[1] and P. CAPODANNO[2]

1. Département de Physique, M2SM, ER28/FS/05, Université Abdelmalek Essaâdi, Faculté des Sciences, Tétouan, Maroc.
Email : hilal_essaouini@yahoo.fr

2. Département de Mathématiques et de Mécanique Théorique, Université de Franche comté, Besançon, France.
Email : pierre.capodanno@neuf.fr

Résumé

Nous étudions le ballottement d'un liquide hétérogène dans un réservoir rectangulaire en présence d'une excitation dynamique horizontale de type sinusoïdale. Les équations régissant le mouvement du liquide sont présentées dans le cas d'un liquide de faible hétérogénéité. L'étude de ces équations montre l'existence d'une petite zone d'instabilité, et l'analyse du ballottement dans la zone stable montre des effets significatifs sur l'évolution de la surface libre du liquide, ces effets dépendent du coefficient de l'hétérogénéité et de la fréquence de l'excitation.

Mots clefs : *Ballottement, Liquide hétérogène, Excitation, Stabilité.*

1. Introduction

Les réservoirs de stockage de liquides sont des structures très répandues dans le domaine du génie civil. Ces installations sont particulièrement employées dans l'industrie et notamment dans l'industrie lourde, dans laquelle elles servent à stocker toutes sortes de produits : hydrocarbures, LNG (Liquid Natural Gaz), etc..., qui sont, pour la majorité, toxiques ou inflammables.

Le problème du ballottement d'un liquide parfaits incompressible homogène dans un réservoir soumis à une excitation horizontale de type sinusoïdale, a été étudié par plusieurs auteurs, nous citons à titre d'exemple la référence [1]. Une étude théorique des petites oscillations d'un liquide parfait incompressible hétérogène (quasi-homogène) surmonté d'un gaz barotrope a été présentée dans le cas d'un container fixe [2]. Dans ce travail nous étudions le ballottement d'un liquide parfait incompressible hétérogène dans un réservoir soumis à une excitation horizontale de type sinusoïdale. Nous donnons les équations régissant le mouvement du liquide dans le cas d'une faible hétérogénéité [1] et nous présentons les profils d'évolution temporelle de la surface libre du liquide dans la zone stable afin d'expliciter les effets significatifs de l'hétérogénéité sur le comportement vibratoire du liquide dans cette zone.

Dans la zone instable le phénomène de résonance complique le comportement du liquide et le rend dangereux et imprévisible.

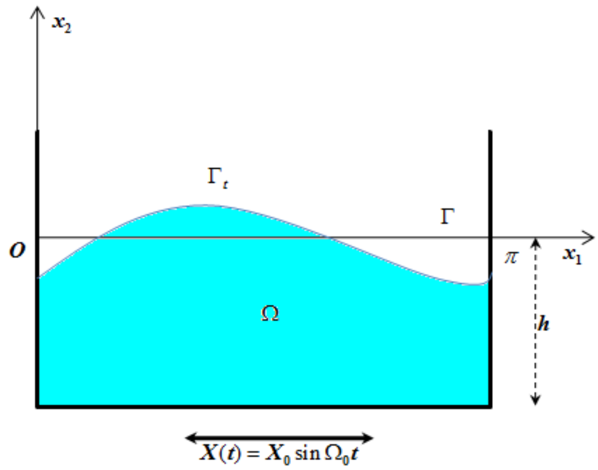


Figure 1. Schéma du problème

2. Equation du mouvement

On considère un liquide parfait à surface libre, incompressible, faiblement homogène [1], dont la densité à l'équilibre est de la forme :

$$\rho_0(x_2) \approx \rho(1-\beta x_2) \qquad \mathbf{(2.1)}$$

en écoulement irrotationnel dans un réservoir rectangulaire de longueur $L=\pi$ et de hauteur h. Le réservoir est soumis à une excitation horizontale sinusoïdale

$$\ddot{X}(t) = -X_0 \Omega_0^2 \sin \Omega_0 t \quad \text{(Figure 1).}$$

Le problème est bidimensionnel et les coordonnées utilisées sont les coordonnées cartésiennes x_1 et x_2.

Nous nous plaçons en théorie linéaire, et nous supposons que l'amplitude de l'excitation et de la réponse du liquide sont petits.

$\vec{u}(x_1, x_2, t)$ désigne le déplacement de la particule fluide par rapport au container, ρ est la densité approchée du fluide, P la pression, β le coefficient de quasi-homogénéité du liquide.
Les équations régissant le mouvement du liquide dans le réservoir, en tenant compte de l'excitation, sont :

$$\left.\begin{array}{r}\rho\ddot{\vec{u}} = -\rho g\ \vec{x}_2 - \overrightarrow{\text{grad}}\ P - \rho\beta g u_2\ \vec{x}_2 - \rho\ddot{X}\ \vec{x}_1 \\ \text{div}\ \vec{u} = 0\end{array}\right\}\text{dans } \Omega \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{array}{l}u_1 = 0 \ \text{ pour } x_1 = 0,\ x_1 = \pi \\ u_2 = 0 \ \text{ pour } x_2 = -h\end{array}\right\} \tag{2.3}$$

$$\int_0^{\pi} u_1(x_1, 0, t)\,\mathrm{d}\,x_1 = 0 \quad (\text{Volume constant}) \tag{2.4}$$

Si la pression au dessous de la surface libre (ligne libre) est nulle, la pression à l'équilibre est $-\rho g x_2$.
Introduisons la pression dynamique p par

$$P = -\rho g x_2 + p \tag{2.5}$$

La condition dynamique sur la surface libre Γ_t , $P_{\Gamma_t} = 0$ s'écrit

$$p_{|\Gamma} = \rho g u_{2|\Gamma} \tag{2.6}$$

3. Solution du problème

Nous utilisons la méthode de séparation des variables et l'analyse de Fourier pour résoudre le problème (2.2), (2.3), nous obtenons l'expression analytique de l'élévation de la surface libre η sous la forme :

$$\eta(x_1, t) = \left[A_0 + B_0\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\cos(2n+1)x_1 \cos(2n+1)\alpha x_1}{\cos(2n+1)\alpha x_1 + \dfrac{\alpha\,\mathrm{g}(2n+1)}{\Omega_0^2 - \beta g}\sin(2n+1)\alpha x_1}\right]\sin\Omega_0 t \tag{2.7}$$

avec $C_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et A_0 , B_0 sont des paramètres qui dépendent de Ω_0 , X_0 et de x_1, et

$$\alpha = \left(\beta g \Omega_0^{-2} - 1\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

4. Résultats et discussions

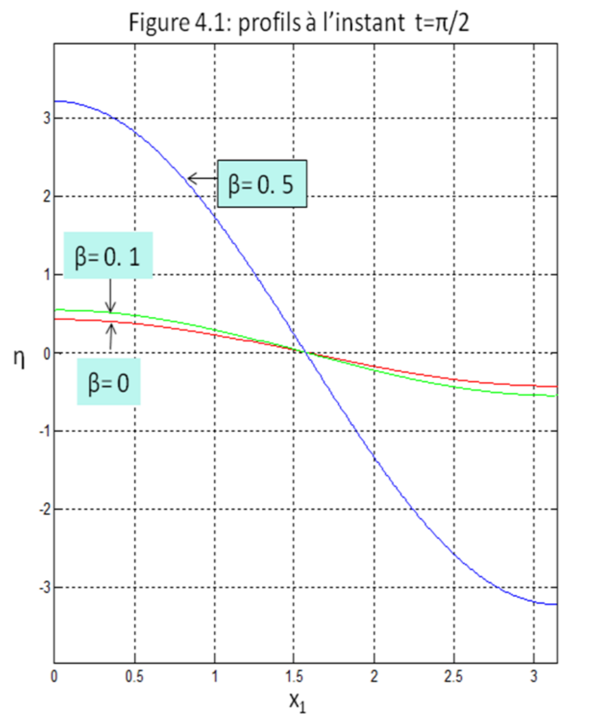
Nous utilisons le logiciel MATLAB (R2010a) pour analyser l'équation (2.7). Nous distinguons les deux cas suivants :

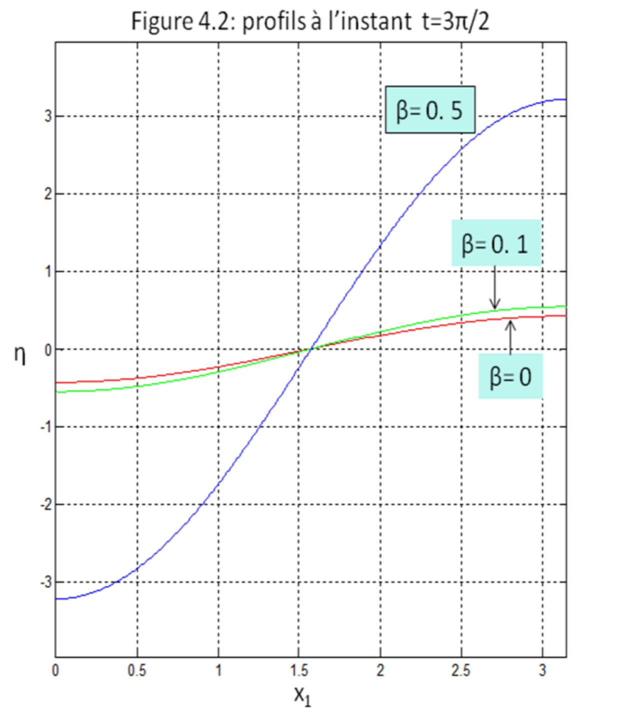
- **i)** $\Omega_0^2 > \beta g$ **(zone stable)**
- **ii)** $\Omega_0^2 < \beta g$ **(zone instable)** : Ce cas a été écarté de la discussion, car il correspond à un phénomène de résonance.

4.1. Profils d'évolution de la surface libre η dans la zone stable : $\Omega_0^2 > \beta g$

a. *Evolution en fonction du coefficient d'hétérogénéité* β

On prend : $\Omega_0 = 3$ (Hz), $X_0 = 0.05$ (m), $g = 10$ (m.s^{-2}), $h = 1$ (m).





b. ***Evolution en fonction de la fréquence de l'excitation*** Ω_0

On prend : $\beta = \mathbf{0.08}$, $\boldsymbol{X_0} = \mathbf{0.05}$ $\mathbf{(m)}$,

$\boldsymbol{g} = \mathbf{10}$ $\mathbf{(m.s^{-2})}$, $\boldsymbol{h} = \mathbf{1}$ $\mathbf{(m)}$.

Figure 4.3: profils à l'instant t=π/2

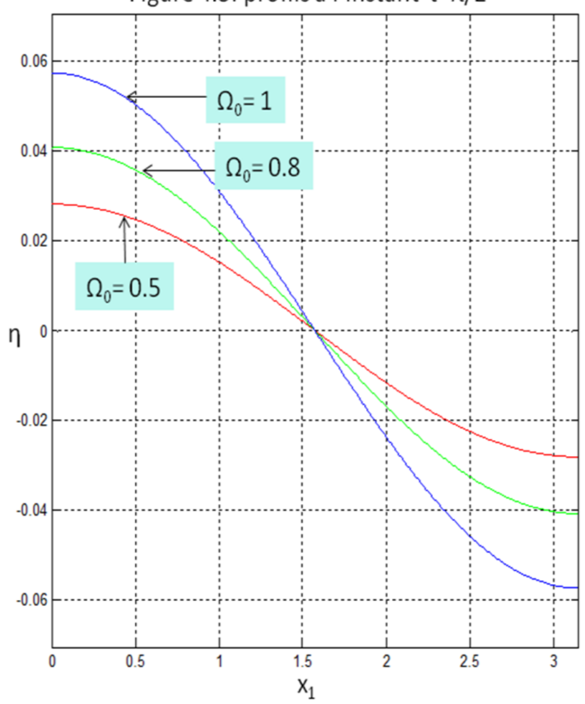
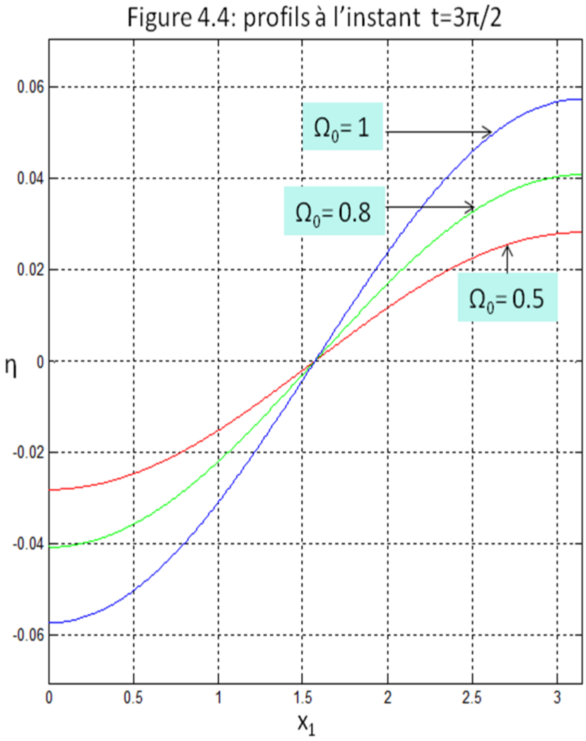


Figure 4.4: profils à l'instant t=3π/2



4.2. Discussions

- Les Figures (4.1, 4.2) montrent que l'élévation de la surface libre du liquide hétérogène dans un réservoir rectangulaire soumis à une excitation horizontale croit rapidement pour des faibles coefficients d'hétérogénéité β et tend vers une limite assez grande (instabilité) lorsque la fréquence de l'excitation devienne plus en plus proche de $\beta \boldsymbol{g}$, ce cas donne lieu à un phénomène de résonance.
- Dans les figures (4.3, 4.4), nous montrons que l'élévation de la surface libre croit avec l'augmentation de la fréquence de l'excitation, ce comportement coïncide avec celui d'un liquide parfait homogène.

5. Conclusions

i) Dans ce travail nous avons considéré le modèle le plus simple d'un liquide parfait hétérogène confiné dans un réservoir rectangulaire soumis à une excitation horizontale de type sinusoïdale, qui nous permet de montrer les effets significatifs de l'hétérogénéité sur la taille de l'élévation de la surface libre du liquide dans la zone stable $\Omega_0^2 > \beta \boldsymbol{g}$.

ii) La zone instable $\Omega_0^2 < \beta \boldsymbol{g}$ donne lieu à un phénomène de résonance.

Références

[1] H. Essaouini, L. El Bakkali, and P. Capodanno, *Analysis of small oscillations of a heavy almost-homogeneous liquid–gas system*, Mechanics research Communications 37 (2010) 337-340.

[2] L.K. Forbes, *Sloshing of an ideal fluid in a horizontally forced rectangular tank*, J. Eng. Math 66 (2010) 395-412.