

# Etude macroscopique du transfert de chaleur par un micro-écoulement de Couette

\* M. HSSIKOU; J. BALITI; M. ALAOUI

Département de physique, Université Moulay Ismail, FS-Meknès – Maroc.

\* Auteur correspondant ([hssikoumed@gmail.com](mailto:hssikoumed@gmail.com))

## Résumé :

Dans le présent travail, on s'intéresse à l'étude d'écoulement d'un gaz raréfié dans le régime de glissement-transition. Un gaz monoatomique de Maxwell est confiné dans une enceinte bidimensionnelle dont tous les parois sont considérées diffusives et portées à une température de référence  $T_0$ . Le gaz est transporté par le cisaillement induit par le mouvement relatif et opposé des deux parois horizontales de la cavité. Ceci génère un transfert de chaleur malgré l'absence du gradient thermique. La théorie macroscopique avancée, équations régularisées de Grad (R13), est utilisée pour décrire ce phénomène qui apparaît dans le cas des gaz raréfiés. Les résultats obtenus sont comparés avec celles de la théorie classique de Navier-Stokes et Fourier (NSF).

**Mots clefs :** Gaz raréfié, NSF, R13, micro-Couette, glissement-transition.

## Abstract:

In this study, the behavior of a rarefied gas flow is investigated in the slip and early transition regime. A monatomic and Maxwell gas is confined within a fully diffusive micro-cavity. The gas is induced by the relative motion, in the opposite directions, of their horizontal walls. The shear stress induced near of the moving walls is accompanied by a heat flux despite there are not a temperature gradient. The regularized 13 moment equations of Grad (R13) is used as an extended macroscopic approach to capture this phenomenon which appears in the rarefied flows. The results of this method are compared with those obtained using the classical theory of Navier-Stokes and Fourier.

**Mots clefs:** rarefied gas, NSF, R13, micro-Couette, slip-transition.

## Nomenclatures & symboles :

$Kn$  : nombre de Knudsen, ( $= \lambda/L$  adimensionnel)

$\lambda$  : parcours moyenne,

$L$  : dimension de la cavité, ( $=1\mu m$ )

$T$  : Température, K

$K_B$  : Constante de Boltzmann ( $=1,3806488.10^{-23}$  SI)

$e$  : énergie totale par unité de masse (unité SI : J. kg<sup>-1</sup>)

$\mu$  : Coefficient de viscosité

$\rho$  : masse volumique du fluide (unité SI : kg.m<sup>-3</sup>)

$\sigma$  : tenseur des contraintes (unité SI : Pa)

$p$  : Pression hydrostatique ( $p = nK_B T = \rho\theta$  unité SI : Pa) ;  $T$  :

Température, (°K) et  $\theta$  : La température dans les unités

d'énergie.  $t$  : Le temps (unité SI : s) ;

$\kappa$  : Coefficient de conductivité thermique

$q$  : vecteur flux de chaleur (SI : J.m<sup>-2</sup>.s<sup>-1</sup>) ;

$R$  : constante des gaz parfaits

$U_w$  : Vitesse des parois ( $= 50$ m/s)

$v$  : La vitesse eulérienne d'une particule fluide (SI : m.s<sup>-1</sup>) ;

$v_0$  : La vitesse thermique du gaz à  $T_0 = 273^\circ K$  ( $= \sqrt{RT_0}$ )

## 1. Introduction

Dans ces dernières années, l'utilisation des microsystèmes électromécaniques (MEMS) dans le domaine industriel a connu un progrès notable. La fabrication et l'optimisation des performances des capteurs et des micro-pompes nécessitent une bonne compréhension de la physique des gaz dans ces microsystèmes [1]. Dans le régime de glissement et de transition, où les MEMS fonctionnent souvent, les effets de raréfaction affectent l'écoulement du gaz. Par suite, les équations classiques de Navier-Stokes et Fourier (NSF), décrivant l'écoulement d'un gaz dans le régime continu ( $Kn \leq 0.01$ ), ne sont plus valables. La régularisation des équations des 13-moments de la fonction de distribution de Grad est une approche développée récemment par Struchtrup et ces co-auteurs pour capturer ces effets, souvent rencontrés dans les micro-écoulements, jusqu'à  $Kn \sim 0.5$  [2,3].

## 2. Description du problème

Le but de la présente étude est de décrire le comportement de l'écoulement de Couette d'un gaz dilué dans une cavité micrométrique de dimension  $L$ , illustrée par la figure ci-dessous, en résolvant numériquement les équations de NSF et de R13.

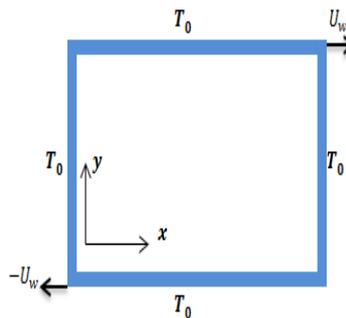


FIG. 1 – microcavité

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui sont censées de décrire le mouvement des fluides « Newtoniens » (liquide et gaz visqueux ordinaires) dans l'approximation des milieux continus. La cohérence mathématique de ces équations non-linéaires n'est pas démontrée. Mais elles permettent souvent, par une résolution approchée, de proposer une modélisation de nombreux phénomènes comme le mouvement des masses d'air dans l'atmosphère pour les météorologistes. En absence des forces externes, ces équations qui traduisent la conservation de la masse, la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \partial_t \rho \mathbf{v} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}^T + p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}) &= 0, \quad (1a, b, c) \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}\left(\rho \varepsilon \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \mathbf{v} + p \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} + \mathbf{q}\right) &= 0. \end{aligned}$$

La résolution de ces équations nécessite la connaissance des expressions du tenseur des contraintes et celui du vecteur flux de chaleur ou bien ce qu'on appelle les équations constitutives. La procédure de régularisation adoptée récemment par Struchtrup et Torrilhon a conduit aux deux équations qui sont donnée en notation indicée (tenseurs à trace-libre) [2] :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij} v_k}{\partial x_k} + \frac{4}{5} \frac{\partial q_{(i}}{\partial x_{j)}} + 2p \frac{\partial v_{(i}}{\partial x_{j)}} + 2\sigma_{k(i} \frac{\partial v_{j)}}{\partial x_k} + \frac{\partial m_{ijk}}{\partial x_k} = -\frac{p}{\mu} \sigma_{ij}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i v_k}{\partial x_k} + \frac{5}{2} p \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{5}{2} \sigma_{ik} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \theta \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \sigma_{ik} \frac{\theta}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \frac{7}{5} q_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{2}{5} q_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{2}{5} q_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + m_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{2p}{3\mu} q_i, \quad (3) \end{aligned}$$

Dans lesquelles de nouveaux termes d'ordre supérieur viennent d'apparaître :

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{\sigma_{kl}\sigma_{kl}}{\rho} + 6 \frac{\sigma_{kl}\sigma_{kl}^{NSF}}{\rho} + \frac{56}{6} \frac{q_k q_k^{NSF}}{\rho} - 12 \frac{\mu}{p} \left( \theta \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - \theta q_k \frac{\partial \ln p}{\partial x_k} \right), \\ R_{ij} &= -\frac{4}{7} \frac{\sigma_{k<i}\sigma_{j>k}}{\rho} + \frac{24}{7} \frac{\sigma_{k<i}\sigma_{j>k}^{NSF}}{\rho} + \frac{192}{75} \frac{q_{<i}q_{j>}^{NSF}}{p} - \frac{24}{5} \frac{\mu}{p} \left( \theta \frac{\partial q_{<i}}{\partial x_{j>}} - \theta q_{<i} \frac{\partial \ln p}{\partial x_{j>}} \right), \quad (4a, b, c) \\ m_{ijk} &= \frac{8}{15} \frac{\sigma_{(ij}q_{k)}^{NSF}}{p} + \frac{4}{5} \frac{q_{(i}\sigma_{jk)}^{NSF}}{p} - 2 \frac{\mu}{p} \left( \theta \frac{\partial \sigma_{(ij}}{\partial x_k} - \theta \sigma_{(ij} \frac{\partial \ln p}{\partial x_k} \right), \end{aligned}$$

Dans le cas classique, en plus de la disparition des termes non linéaire  $\Delta$ ,  $R_{ik}$  et  $m_{ijk}$ , la contrainte de cisaillement et le flux de chaleur se réduisent à :

$$\sigma_{ij}^{NFS} = -2\mu \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} \quad ; \quad q_i^{NFS} = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (5a, b)$$

Les systèmes d'équations R13 & NSF sont résolus numériquement, à l'état stationnaire, en utilisant la méthode des différences finies. Pour ce faire, les équations sont condensées dans une forme matricielle permettant de faciliter leur implémentation. Les conditions aux limites issues du modèle cinétique de Maxwell [4] sont utilisées aux frontières du système. Pour plus de détails sur ces conditions ainsi que l'algorithme de la méthode voir notre récent article [5]. Pour des raisons de simplicité, les propriétés macroscopiques du gaz sont présentées par rapport à des valeurs de références  $\theta_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\rho_0$ ,  $L$  et  $v_0 = \sqrt{\theta_0}$ . Il est à noter que ces variables sont reliées au nombre de Knudsen qui détermine le degré de raréfaction du gaz par la relation :  $Kn = \mu/(L\rho\sqrt{\theta})$ .

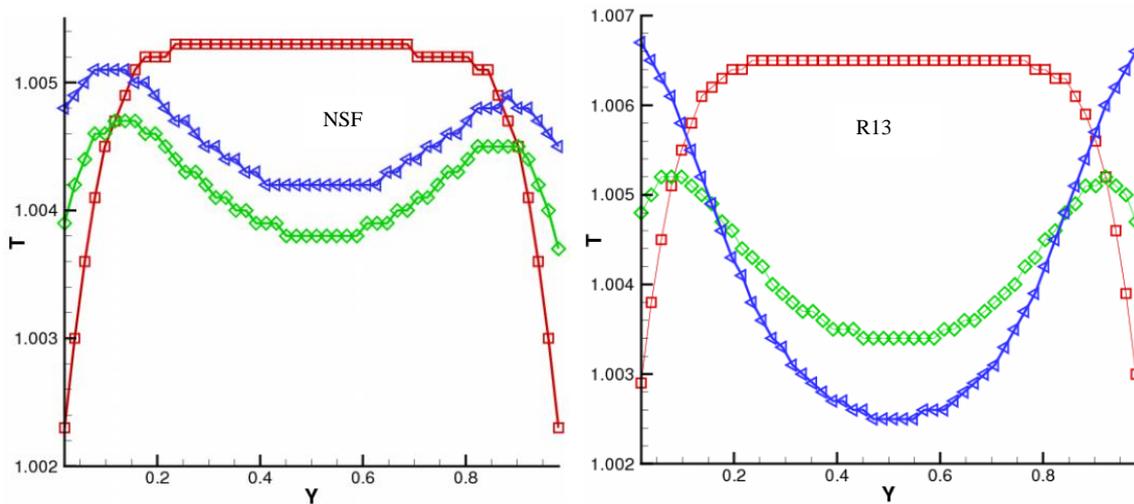
Les variables adimensionnelles utilisées dans cette étude sont :

$$\begin{aligned} X, Y = x, y/L, \quad V_i = v_i/v_0, \quad q_i = q_i/(\rho_0\theta_0v_0), \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_0, \quad \bar{\theta} = \theta/\theta_0 \equiv T/T_0, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/(\rho_0\theta_0), \\ \bar{R}_{ij} = R_{ij}/(\rho_0\theta_0^2), \quad \bar{\Delta} = \Delta/(\rho_0\theta_0^2) \text{ and } \bar{m}_{ijk} = m_{ijk}/(\rho_0\theta_0v_0). \end{aligned}$$

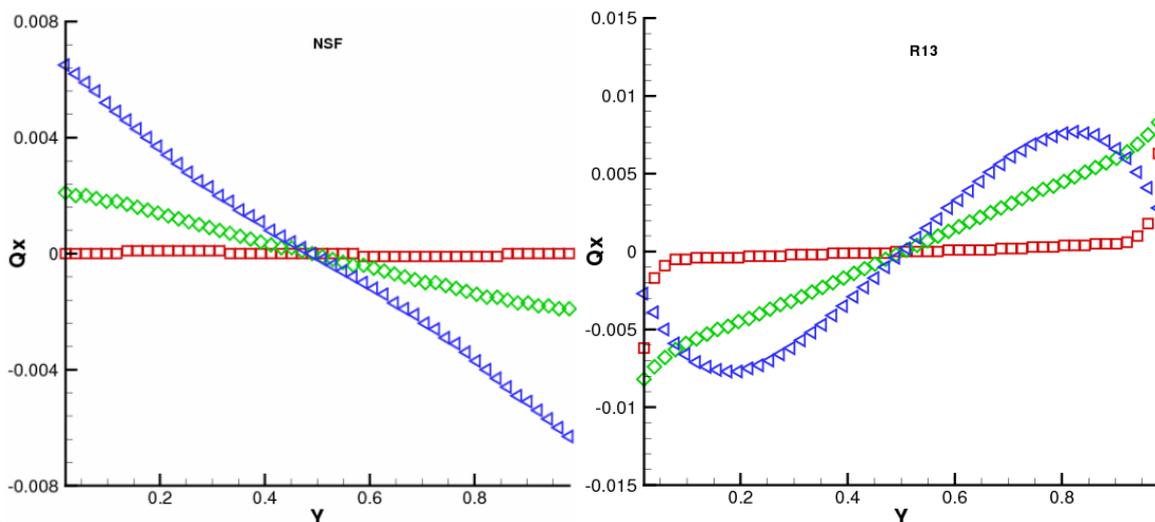
### 3. Résultats et discussion

Dans la présente étude on s'intéresse uniquement au transfert de chaleur induit par le mouvement des parois de la cavité. Après la résolution numérique du système d'équations des moments ainsi obtenues après la procédure de régularisation, les profils hydrodynamiques du gaz sont représentés dans les figures suivantes. Les figures 1a, b montrent que pour  $Kn = 0.01$ , la variation est de  $T(y)$  obtenue par les deux méthodes, NSF et R13, au centre de la

cavité est presque la même avec un saut de température plus important par R13. Ceci vient du fait que ce phénomène du saut de température au voisinage des parois se produit sous l'effet de la raréfaction du gaz. Mais avec l'augmentation de  $Kn$ , on remarque que la théorie de NSF devient non sensible à la raréfaction contrairement à celle de R13. Pour  $Kn = 0.1$ , R13 prévoit une inversion du profil de température. Les valeurs importantes de  $T$  au voisinage des parois, qui sont en mouvement, ne peut pas s'expliquer dans le cadre de la théorie continue de NSF. Ceci est dû au mouvement des particules à la variation de la population des particules du gaz sous l'effet du mouvement des parois horizontales.

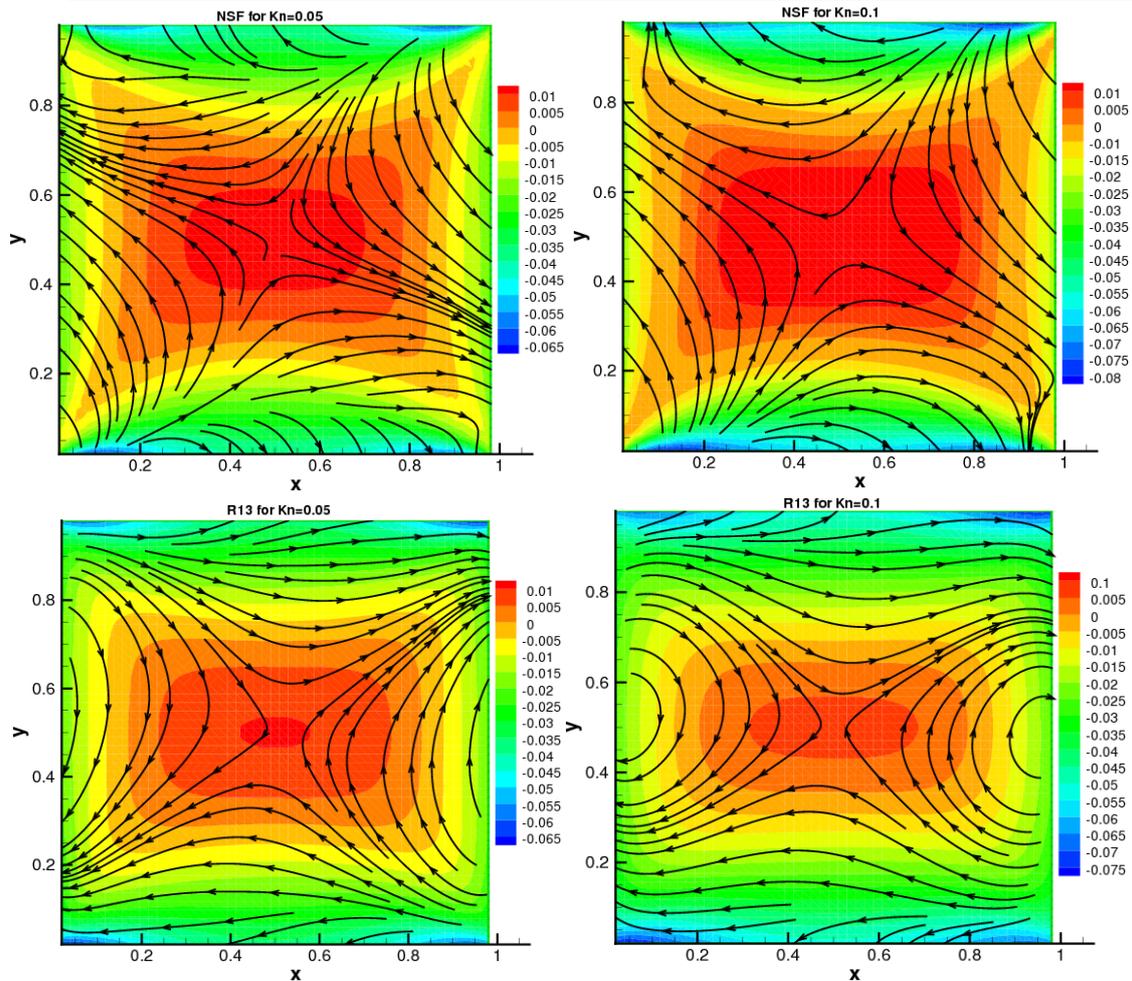


Figs.1a, b : Profils de température pour  $Kn = 0.01$ (carré),  $Kn = 0.05$ (losange) et  $Kn = 0.1$  (triangle) en fonction de  $y$  obtenus par NSF et R13 à  $x = 0.5L$ .



Figs.2a, b : Profils du flux de chaleur  $Q_x$  pour  $Kn = 0.01$ (carrés),  $Kn = 0.05$ (losanges) et  $Kn = 0.1$  (triangles) en fonction de  $y$  obtenus par NSF et R13 à  $x = 0.5L$ .

Cette défiance de la théorie de NSF dans le cas d'un gaz raréfié, est également confirmée par le profil de la composante tangentielle du vecteur flux de chaleur  $Q_x(y)$ . Pour bien comprendre le mécanisme du transfert de chaleur dans les deux dimensions ainsi que la variation de la contrainte de cisaillement, les lignes de chaleurs sont superposées avec les contours de la contrainte. Cette vision bidimensionnelle vient de confirmer l'inversion des profils de  $T(y)$   $Q_x(y)$  pour  $Kn = 0.05$  et  $Kn = 0.1$  ce qui montre clairement l'insuffisance de la théorie macroscopique de NSF pour un gaz raréfié.



Figs.3a, b, c : Lines de chaleur et contours du contrainte de cisailment pour  $Kn = 0.05$  et  $Kn = 0.1$  obtenus par NSF et R13.

#### 4. Conclusion

Dans la présente étude, le comportement d'un gaz monoatomique et dilué dans une cavité micrométrique a été étudié dans le cadre de la théorie macroscopique. L'approche de régularisation des 13-moments de Grad a permis d'étendre le domaine de validité de la description macroscopique. Cette approche a permis, contrairement à la théorie macroscopique de NSF, de capturer correctement le mécanisme de transfert de chaleur même en absence gradient thermique. Ce approche permet d'expliquer ce phénomène de transfert de chaleur ainsi que les phénomènes de glissement de vitesse et de saut de température qui entre dans la spécialité des approches cinétiques à savoir la méthode DSMC.

#### 5. Références :

- [1] Gad-el-Hak, M., The MEMS Handbook, vols. I–III, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
- [2] Struchtrup, H., Macroscopic Transport Equations for Rarefied Gas Flows; Springer Berlin Heidelberg New York, (2005).
- [3] Struchtrup, H., and Torrilhon, M.; Regularization of Grad's 13 moment equations: Derivation and linear analysis; Phys. Fluids 15, 2668 (2003).
- [4] Torrilhon, M., Struchtrup, H., Boundary conditions for regularized 13-moment-equations for micro-channel-flows; Journal of Computational Physics 227 (2008a) 1982–2011.
- [5] Mohamed Hssikou, Jamal Baliti, and Mohammed Alaoui, Extended Macroscopic Study of Dilute Gas Flow within a Microcavity, Hindawi Publishing Corporation Modelling and Simulation in Engineering , Volume 2016, Article ID 7619746, 9 pages.