

# Modélisation de la contrainte pariétale dans un écoulement transitoire et laminaire en conduite à l'aide d'un développement polynomial.

S. <sup>1</sup>Hamdoun, O. <sup>1</sup>Rkibi, H. <sup>1</sup>Samri, M. <sup>2</sup>Tamani, E.L. <sup>1</sup>Achouyab, B. <sup>1</sup>Bahrar

1. Equipe de Mécanique, Energétique & Environnement, ENSET de Mohammedia, Université Hassan II, Casablanca  
[bahrarb@yahoo.fr](mailto:bahrarb@yahoo.fr)
2. Equipe de Mécanique, EST de Meknes, Université Moulay-Ismaïl, Meknes

## Résumé :

Cette étude concerne la modélisation numérique de la contrainte de cisaillement dans l'écoulement laminaire transitoire en conduite. Elle est basée sur le développement des profils de la vitesse instantanée de l'écoulement en série polynomiale de deux variables temps et composante radiale à travers la section de la conduite. Le système d'équations aux dérivées partielles est obtenu à partir de l'équation de conservation de la masse et du théorème de la quantité de mouvement et est résolu en utilisant la méthode des caractéristiques. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux donnés par Hombloe et al. [1], et, Vardy et al. [2], dans le cas d'écoulement laminaire d'un fluide Newtonien.

## Abstract :

This study concerns a theoretical and numerical modeling of shear stress in transient laminar flow. This work is based on the development of profiles of the instantaneous flow velocity in time and radial component through the section of pipe. The partial differential equations system, is derived from the equation of conservation of mass and momentum, and solved using the method of characteristics. The results are in good agreement with those given by Hombloe and Rouleau [1] and Vardy et al. [2], in laminar flow of Newtonian fluid.

**Mots clefs :** *contrainte de cisaillement transitoire, écoulement laminaire Newtonien, profils de vitesse, développement polynomial, méthode des caractéristiques.*

## 1. Introduction :

En écoulement transitoire en conduite, la partie essentielle de la dissipation d'énergie provient de la perte de pression due au frottement du fluide sur la paroi, Streeter et Wylie [3]. Les écarts relatifs à la dissipation de l'énergie sont introduits par une différence de profil de vitesse, la turbulence et la transition du régime

laminaire à un écoulement turbulent et vice versa. Il existe un grand nombre de modèles qui sont proposés dans la littérature. Nous pouvons, principalement, citer les travaux de Zielke [4], Trikha [5], Brown [6], Yigang et Jing-Chao [7], Suzuki et al [8], Samri[9]. Ce travail est essentiellement consacré à l'élaboration d'un modèle semi analytique qui combine une méthode de développement en série polynomial du profil de vitesse instantanée et de la méthode des caractéristiques pour modéliser la contrainte pariétale transitoire liée à la dissipation de l'énergie par frottement visqueux. Les équations différentielles obtenues sont de type hyperbolique et la méthode de résolution s'adapte parfaitement à la méthode des caractéristiques.

## 2. Relations de base:

### 2.1 Hypothèses :

Cette étude est menée dans l'hypothèse d'écoulement axisymétrique, non stationnaire d'un fluide Newtonien compressible et isentropique en conduite élastique, cylindrique de rapport rayon/ longueur assez faible pour que les lignes de courant des particules soient rectilignes et l'écoulement unidimensionnel. La déformation de la paroi de conduite est de faible amplitude. Les termes d'inerties sont négligeables. La conduite est modélisée par une juxtaposition d'anneaux indépendants et sans masse. On suppose, par ailleurs, que les gradients longitudinaux de vitesses sont très faibles devant les gradients transversaux.

### 2.2 Mise en équation :

Les relations de base permettant de définir l'écoulement de fluide sont :

- Relation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

- Equation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

La relation (3) montre que la pression est pratiquement constante dans chaque section de la conduite et est égale à sa valeur moyenne sur la section.

En introduisant la vitesse moyenne :

$$V = \int_A v_x dA / \int_A dA = \int_0^R v_x r dr / \int_0^R r dr = 2 \int_0^1 v_x \bar{r} d\bar{r}$$

et la pression moyenne :

$$P = \int_A p dA / \int_A dA = \int_0^R p r dr / \int_0^R r dr = 2 \int_0^1 p \bar{r} d\bar{r}$$

Où nous avons noté par  $\bar{r}$ , la variable réduite,  $\bar{r} = r/R$

L'intégration des équations (1) et (2) sur une section de la conduite permet d'obtenir le système suivant :

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = -4 \frac{\tau_p}{D} \quad (5)$$

$P$  : la pression motrice du fluide,  $P = p + \rho g z$

La contrainte pariétale dépend des profils de vitesses.

La technique consiste à modéliser le profil de vitesse dans chaque section de la conduite et à chaque instant par une expression polynomiale de la variable

adimensionnelle  $\bar{r} = r/R$  de la forme :

$$v_x(x, \bar{r}, t) = \sum_{j \in J} a_j(x, t) (1 - \bar{r}^j) \quad (6)$$

Où la sommation s'étend à un ensemble d'entiers arbitraires  $j$  de valeurs supérieures ou égales à deux.

Pour la détermination des coefficients  $a_j$  nous introduisons les vitesses moyennes pondérées  $V_i$  telles que :

$$V_i(x, t) = \int_A v_x(x, r, t) r^i dr / \int_A r^i dA$$

Pour  $i = 0, 1, \dots, \dim(J) - 1$ , on obtient pour les expressions des coefficients  $a_j$  :

$$a_j = \sum_{i=0}^{\dim(J)-1} G_{ij}^{-1} V_i \quad (7)$$

Où, compte tenu de l'expression (6) du profil de vitesse,

$$G_{ij} = (i+2) \int_0^1 (1 - \bar{r}^j)^i \bar{r}^{i+1} d\bar{r} \quad (8)$$

A partir de cette expression, on peut également, déduire pour un écoulement laminaire de fluide newtonien, la contrainte pariétale sous la forme :

$$\tau_p = \mu \frac{\partial v_x(x, R, t)}{\partial r} = -\frac{\mu}{R} \sum_{i=0}^{\dim(J)-1} \left[ \sum_j j G_{ij}^{-1} \right] V_i \quad (9)$$

Par conséquent, le présent modèle considère la contrainte pariétale,  $\tau_p$ , non seulement, en fonction de la vitesse moyenne comme dans le cas du modèle quasi-stationnaire, mais aussi, fonction des vitesses moyennes pondérées  $V_i, i = 1, 2, \dots, \dim(J) - 1$ .

L'intégration de l'équation (2) sur une section droite de la conduite après multiplication par  $\bar{r}^i$  pour  $i = 0, \dots, \dim(J) - 1$ , conduit au système différentiel :

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = S_i \quad (10)$$

Où les termes sources sont définis par :

$$S_i = \sum_{j \in J} \sum_{k=0}^{\dim(J)-1} H_{ij} G_{jk}^{-1} V_k$$

Les coefficients de la matrice  $H$  sont définis par :

$$H_{ij} = -\frac{\nu}{R^2} \frac{(i+2) j^2}{(i+j)} \quad (11)$$

$\nu$  : la viscosité cinématique du fluide

Les conditions aux limites sont en plus de la pression exercée par le réservoir sur l'extrémité amont, la fermeture instantanée de la vanne en aval.

### 3. Application et résultats

Pour illustrer les résultats et valider notre modèle, nous considérons les paramètres correspondant aux expériences faites par Hombloe et al., et, Vardy et al. Longueur de la conduite  $L = 36m$ , rayon de la conduite  $R = 0.0127m$ , Viscosité cinématique du fluide  $\nu = 3.96 \times 10^{-5} m^2/s$  (à  $27^\circ C$ ), célérité du coup de bélier  $a = 1324.4m/s$ , vitesse d'écoulement en régime permanent avant la fermeture de la vanne,  $V_0 = 0.128m/s$ ,

Nombre de Reynolds  $Re = 82.1$

La hauteur de fluide dans le réservoir, supposée constante,  $H_0(m)$ . Les figures 1 et 2 correspondent à la variation en fonction du temps, de la contrainte de cisaillement et du profil de vitesse au milieu de la conduite. Chaque figure correspond à la superposition des résultats pour les différentes approximations polynomiales des profils de vitesse. Ces représentés dans les figures 1 et 2 ci-dessous sont confrontés à ceux

trouvés par Hombloe et al. [1], et, Vardy et al. sont en parfaite concordance. On constate que, par rapport au modèle quasi stationnaire, la prise en compte de la variation des profils de vitesse introduit une correction appréciable. Cependant, on constate que l'augmentation du degré du polynôme n'a pas, pratiquement d'influence.

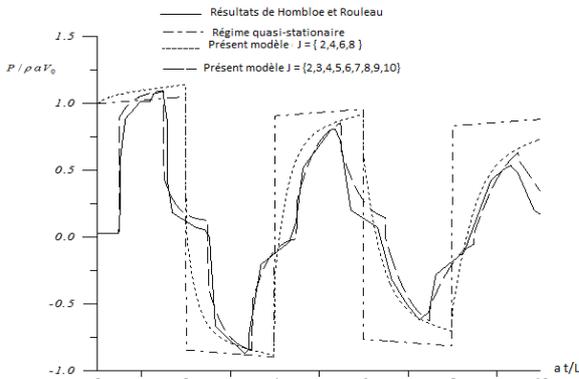


Figure 1: Evolution de la pression au milieu de la conduite en fonction du temps

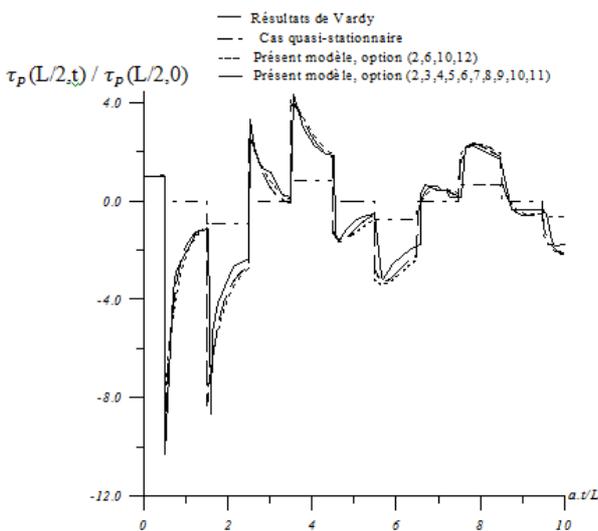


Figure 2: Evolution de la contrainte en fonction du temps, au milieu de la conduite

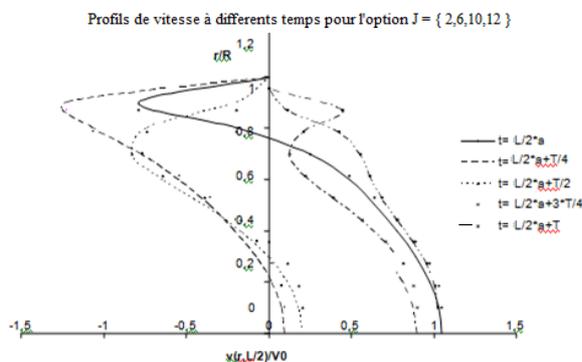


Figure 3: Evolution des profils de vitesse à différents instants

## 4. Conclusion

Cette étude montre que, par rapport au modèle d'écoulement quasi-stationnaire ne prenant en compte, au niveau du frottement, que la vitesse moyenne de l'écoulement, la prise en compte du caractère réel des profils de vitesse, a l'avantage d'apporter une correction importante à l'évaluation de la contrainte transitoire dans les écoulements laminaires et transitoires en conduites. Ce modèle a l'avantage d'être moins prohibitif et d'exiger peu de calcul donc d'espace mémoire pour donner une meilleure représentation de la contrainte pariétale. Du point de vue pratique, ce code peut facilement être utilisé dans les codes existants pour calculer les écoulements laminaires transitoires en conduites.

## Référence :

- [1] E. L. Holmboe, W. T. Rouleau, The effect of viscous shear on transient in liquid lines, Journal of Basic Engineering ASME, 89 (1967), 140 - 148.
- [2] VARDY, A.E., HWANG, K.L., and BROWN, J.M.B.(1993). A weighting function model of transient turbulent pipe flow. Journal of hydraulic research, IAHR 31(4), 533-548.
- [3] Streeter and Wylie, Advances in the use of MOC in the unsteady flow, Proc. 4th Int. Con/. On Pressure Surges, BHRA, Bath, England, (1983), 27 - 36.
- [4] W. Zielke, Frequency-dependent friction in transient pipe flow, Journal of Basic Engineering, ASME, 90 (1968), 109 - 115. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3605049>
- [5] A. K. Trikha, An efficient method for simulating frequency-dependent friction in transient liquid flow, Journal of Fluids Engineering, ASME, 97 (1975), 97 - 105.
- [6] F. T. Brown, On weighting functions for the simulation of unsteady turbulent Flow, Forum on Unsteady Flow, ASME, New Orleans, USA, FED, 15 (1984), 26 - 28.
- [7] S. Jing-Chao, C. Yigang, An efficient approximate expression for transient flow of high viscous fluid in hydraulic pipelines, Proc. 6th Int. Con/. on Pressure Surges, BHRA, Cranfield, England, (1989), 349 - 356.
- [8] S. Sato, K. Suzuki, and T. Taketomi, Improving Zielke's method of simulating frequency-dependent friction in laminar liquid pipe flow, Journal of Fluids Engineering, ASME, 113 (1991), 569 - 573. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2926516>
- [9] H. Samri (2015), Modélisation Numérique des Profils Radiaux de la Vitesse Axiale et de la Contrainte pariétale dans les Ecoulements Laminaires Transitoires en Conduites. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences, Rabat.