

La méthode du chaos polynomial pour l'analyse dynamique des structures non linéaires à paramètres incertains.

M.Lamrhari¹, D. Sarsri², L. Azrar³, M.Rahmoune¹, K.Sbai¹

¹Laboratoire d'Etude des Matériaux Avancés et Applications, FS-EST, Université Moulay Ismail Meknès, Maroc ; Lamrha@yahoo.fr

²LTI, ENSA, Université Abdelmalek Essaadi, Tanger, Maroc ; dsarsri@ensat.ac.ma

³Equipe MMC, FST, Université Abdelmalek Essaadi, Tanger, Maroc ; lazrar@uae.ma

Résumé

L'incertitude des paramètres physiques d'une structure non linéaire influence largement la réponse dynamique. Ce travail porte sur l'étude de la variabilité de la réponse transitoire d'une telle structure. La méthode du chaos polynomial est utilisée pour modéliser l'incertitude des paramètres physiques de la structure. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la méthode de référence de Monte-Carlo. Nous présentons quelques simulations numériques pour démontrer l'efficacité et l'applicabilité de l'approche proposée.

Mots clefs: Structure non linéaire, la variabilité de la réponse, la méthode du chaos polynomial, l'incertitude des paramètres.

1. Introduction

La détermination de la réponse dynamique non linéaire d'une structure à une excitation donnée en utilisant l'intégration temporelle suppose en général que les paramètres physiques du modèle sont déterministes. Or dans la réalité ces paramètres sont aléatoires. Pour évaluer la variabilité de la réponse dynamique non linéaire vis à vis la variabilité des paramètres incertains du modèle, une simulation directe de Monte Carlo[1] peut être utilisée, cette méthode est utilisée souvent comme référence, néanmoins le temps de calcul prohibitif limite l'emploi de cette méthode. Nous présentons une nouvelle méthode stochastique basée sur la projection du chaos polynomial [2,4], les solutions stochastiques sont projetées sur une base de polynômes orthogonaux dont les variables sont des gaussiennes ortho normales. Les propriétés de cette base de polynômes sont utilisées pour générer un système d'équations au moyen de la projection. La résolution de ce système conduit à une expansion de la solution sur la base polynomiale, qu'on peut utiliser pour trouver de manière soit analytique ou numérique la distribution de la solution aléatoire (la moyenne et l'écart type).

2. Intégration temporelle par la méthode de Newmark d'un système dynamique non linéaire.

La méthode des éléments finis appliquée au calcul dynamique d'une structure non linéaire à N Degrés De Liberté (D.D.L), conduit aux équations suivantes :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} + \{F_{nl}\} = \{F_e\} \quad (1)$$

Où : $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement visqueux et de rigidité. Elles sont carrées d'ordre N . La matrice $[M]$ est symétrique définie positive ; la matrice $[K]$ est symétrique définie non négative. La matrice d'amortissement $[C]$ n'est pas calculable en pratique. En général l'amortissement est introduit dans les modèles sous forme d'un amortissement modal. $\{F_{nl}\}$ et $\{F_e\}$ sont respectivement le vecteur des forces non linéaires qui est une fonction cubiques des déplacements $\{u\}$ et le vecteur des forces extérieures. La solution du système sera déterminée entre l'instant 0 et l'instant T , l'intervalle T sera divisé en n intervalles $\Delta t = \frac{T}{n}$ connaissant la solution aux instants $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$. On cherchera la solution à l'instant $(t + \Delta t)$. En utilisant la méthode de Newmark pour les systèmes dynamiques non linéaires. Les développements des accélérations et des vitesses à l'instant $(t + \Delta t)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \{\ddot{u}(t + \Delta t)\} &= a_0(\{u(t + \Delta t)\} - \{u(t)\}) - a_1\{\dot{u}(t)\} \\ &\quad - a_3\{\ddot{u}(t)\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\{\dot{u}(t + \Delta t)\} = \{\dot{u}(t)\} + a_6\{\dot{u}(t)\} + a_7\{\ddot{u}(t + \Delta t)\}$$

Dans lesquelles :

$$a_0 = \frac{\delta}{\alpha(\Delta t)^2}, a_1 = \frac{\delta}{\alpha(\Delta t)}, a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_6 = (\Delta t)(1 - \delta) \quad \text{et} \quad a_7 = (\Delta t)\delta$$

α et δ sont deux paramètres qui assurent la précision et la stabilité de la solution. Lorsque $\delta \geq \frac{1}{2}$ et $\alpha \geq \frac{(\delta+0.5)}{4}$ la méthode de Newmark est inconditionnellement stable.

L'équation du mouvement (1) est donnée à l'instant $(t + \Delta t)$ par :

$$[M]\{\ddot{u}(t + \Delta t)\} + [C]\{\dot{u}(t + \Delta t)\} + [K]\{u(t + \Delta t)\} + \{F_{nl}(u(t + \Delta t))\} = \{F_e(t + \Delta t)\} \quad (3)$$

Remplaçons les équations (2) et (3) dans l'équation(1), on obtient l'équation suivante:

$$[K_{eq}]\{u(t + \Delta t)\} = \{F_{eq}\} \quad (4)$$

$$\text{Avec : } [K_{eq}] = [K] + [K_{nl}] + a_0[M] + a_1[C]$$

$$[K_{nl}] = \left. \frac{\partial \{F_{nl}\}}{\partial u} \right|_{\{u\}=\{u(t)\}}$$

$$\{F_{eq}\} = \{F_e(t + \Delta t)\} + [M]\{a_0\{u(t)\} + a_2\{\dot{u}(t)\} + a_3\{\ddot{u}(t)\}\} + [C]\{a_1\{u(t)\} + a_4\{\dot{u}(t)\} + a_5\{\ddot{u}(t)\}\}$$

Avec:

$$a_2 = \frac{1}{\alpha(\Delta t)}, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad \text{et} \quad a_5 = \frac{(\Delta t)}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right)$$

3. Projection sur un chaos homogène

Les solutions stochastiques sont projetées sur une base de polynômes orthogonaux dont les variables sont des gaussiennes orthonormales. Les propriétés de cette base de polynômes sont utilisées pour générer un système d'équations au moyen de projection. La résolution de ce système conduit à une expansion de la solution sur la base polynomiale, qu'on peut utiliser pour trouver de manière numérique la distribution de la solution aléatoire la moyenne, l'écart type.

Les polynômes chaotiques ψ_n correspondant aux polynômes d'Hermite multidimensionnels obtenus par :

$$\psi_n(\xi_i, \dots, \xi_p) = (-1)^p \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} T\{\xi\}\{\xi\}\right] \frac{\partial^p}{\partial \xi_i \dots \partial \xi_p} \quad (5)$$

Les matrices aléatoires $[M]$, $[C]$, $[K]$ et le vecteur des forces extérieures aléatoires $\{F_e\}$ peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [M] &= \sum_{m=0}^M [M_m] \cdot \xi_m \\ [C] &= \sum_{c=0}^C [C_c] \cdot \xi_c \\ [K] &= \sum_{k=0}^K [K_k] \cdot \xi_k \\ \{F_e\} &= \sum_{f=0}^F \{F_{ef}\} \xi_f \end{aligned} \quad (6)$$

Où les ξ_i sont des gaussiennes centrées réduites et indépendantes. Les matrices $[M_m]$, $[C_c]$ et $[K_k]$ sont des matrices déterministes et Le vecteur des forces extérieures $\{F_{ef}\}$ est déterministe.

Une décomposition du vecteur déplacement $\{u(t)\}$, vitesse $\{\dot{u}(t)\}$ et accélération $\{\ddot{u}(t)\}$ sur des polynômes à Q variables aléatoires gaussiennes orthonormales est donnée par :

$$\begin{aligned} \{u(t)\} &= \sum_{n=0}^N \{u_n(t)\} \cdot \psi_n(\{\xi_i\}_{i=1}^Q) \\ \{\dot{u}(t)\} &= \sum_{n=0}^N \{\dot{u}_n(t)\} \cdot \psi_n(\{\xi_i\}_{i=1}^Q) \\ \{\ddot{u}(t)\} &= \sum_{n=0}^N \{\ddot{u}_n(t)\} \cdot \psi_n(\{\xi_i\}_{i=1}^Q) \end{aligned} \quad (7)$$

Le vecteur des forces non linéaire peut s'écrire sous la forme:

$$\{F_{nl}(u(t))\} = \left\{ F_{nl} \left(\sum_{n=0}^N \{u_n(t)\} \cdot \psi_n(\{\xi_i\}_{i=1}^Q) \right) \right\} \quad (8)$$

La substitution de ces équations dans l'équation de mouvement (7) donne :

$$\begin{aligned} [K_{eq}] &= \sum_{k=0}^K [K_k] \cdot \xi_k + \\ &+ \left[\frac{\partial \{F_{nl}(\sum_{n=0}^N \{u_n(t)\} \cdot \psi_n(\{\xi_i\}_{i=1}^Q))\}}{\partial u_n} \right] \\ &+ a_0 \left(\sum_{m=0}^M [M_m] \cdot \xi_m \right) \\ &+ a_1 \left(\sum_{c=0}^C [C_c] \cdot \xi_c \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \{F_{eq}\} &= \sum_{f=0}^F \{F_{ef}(t + \Delta t)\} \xi_f \\ &+ \sum_{m=0}^M [M_m] \sum_{n=0}^N (a_0 \{u_n(t)\} \\ &+ a_2 \{\dot{u}_n(t)\} + a_3 \{\ddot{u}_n(t)\}) \xi_c \psi_n \\ &+ \sum_{c=0}^C [C_c] \cdot \sum_{n=0}^N (a_1 \{u_n(t)\} \\ &+ a_4 \{\dot{u}_n(t)\} + a_5 \{\ddot{u}_n(t)\}) \xi_c \psi_n \end{aligned}$$

On remplace $\{u(t + \Delta t)\}$ alors par son expansion (7) dans l'équation (4), et on multiplie l'équation obtenue par ψ_m . Si on fait la moyenne (intégration sur le domaine des variables aléatoires), et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynômes, on arrive à l'équation suivante:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N u_n(t + \Delta t) [K_k] \cdot h_{knm} \\ &+ [K_{nl}] \sum_{n=0}^N u_n(t + \Delta t) \langle \psi_n \psi_m \rangle \\ &+ a_0 \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N u_n(t + \Delta t) [M_m] \cdot h_{mnm} \right) \\ &+ a_1 \left(\sum_{c=0}^C \sum_{n=0}^N u_n(t + \Delta t) [C_c] \cdot h_{cnm} \right) \\ &= \{F_{eqc}\} \langle \psi_m \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \{F_{eq}\} \langle \psi_m \rangle &= \sum_{f=0}^F \{F_{ef}(t + \Delta t)\} \langle \xi_f \psi_m \rangle \\ &+ \sum_{m=0}^M [M_m] \cdot \sum_{n=0}^N (a_0 \{u_n(t)\} \\ &+ a_2 \{\dot{u}_n(t)\} + a_3 \{\ddot{u}_n(t)\}) h_{mnm} \\ &+ \sum_{c=0}^C [C_c] \cdot \sum_{n=0}^N (a_1 \{u_n(t)\} \\ &+ a_4 \{\dot{u}_n(t)\} + a_5 \{\ddot{u}_n(t)\}) h_{cnm} \end{aligned}$$

Ou : $h_{inm} = \langle \xi_i \psi_n \psi_m \rangle$
le système (10) conduit à un système de (N+1) équations algébriques, dont la solution correspond aux vecteurs $\{u_n(t + \Delta t)\}$, il faut noter que du fait de l'orthogonalité

des polynômes, la plupart des expressions $h_{inm} = \langle \xi_i \psi_n \psi_m \rangle$ sont nulles. Une fois les $\{u_n(t + \Delta t)\}$ sont déterminés, la moyenne et la variance sont données par :

$$mean(\{u(t + \Delta t)\}) = \{u_0(t + \Delta t)\}$$

$$var(\{u(t + \Delta t)\}) = \sum_{n=1}^N \{u_n(t + \Delta t)\}^2 \langle \psi_n \rangle^2 \quad (11)$$

4. Simulation numérique

La méthode présentée peut être appliquée aux systèmes continus ou discrets. Dans cet article, on se restreint à montrer l'applicabilité et l'efficacité de cette méthode pour l'analyse dynamique des systèmes discrets non-linéaires à N D.D.L. Un système dynamique constitué de 20 masses reliées par 21 ressorts non linéaires est considéré figure 1.

Les caractéristiques suivantes sont considérées:

Les masses : $m_1 = m_2 = \dots = m_{20} = 2 \text{ kg}$

Les rigidités linéaires : $k_1 = k_3 = \dots = k_{41} = 50 \text{ N/m}$

Les rigidités cubiques : $k_2 = k_4 = \dots = k_{42} = 10 \text{ N/m}^3$



Figure 1 Structure étudiée

Pour l'analyse stochastique nous supposons que les masses m_i sont aléatoires, elles suivent la loi normale. La matrice de masse s'écrit sous la forme $[M] = m \cdot [B]$

$[M]$: Matrice de masse

$[B]$: est une matrice déterministe

m est une variable aléatoire gaussienne : $m = m_0 + \sigma_m \cdot \xi$

m_0 : Moyenne de la masse m

σ_m : Écart type de la raideur m

ξ : Variable normale centrale réduite.

Les réponses temporelles instantanées du système en utilisant 900 simulations de Monte-Carlo et la méthode de la projection sur un chaos polynomial d'ordre 2 sont représentées sur les figures 2 et 3 qui correspondent respectivement à la moyenne instantanée de déplacement temporel et la variance instantanée pour la masse 4. On peut constater que les deux méthodes d'analyse stochastique fournissent des résultats très similaires avec un cout de calcul réduit table1. D'autres résultats numériques ont été obtenus pour les autres masses. L'adaptation aux systèmes continus assemblés est immédiate en utilisant la méthode des éléments finis.

Table1 : Comparaison du temps CPU en (s) par les deux méthodes MCS et PCE d'ordre 2

	Monte Carlo Simulation MCS	Polynomial Chaos Expansion PCE d'ordre2
Temps CPU en (s)	180.202314	2.693600

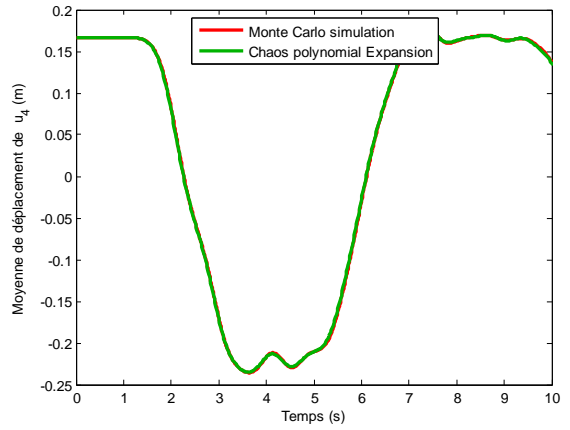


Figure 2 : Moyenne de déplacement au nœud (4)

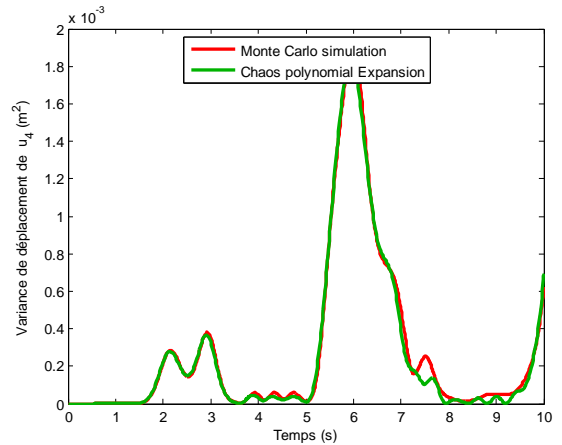


Figure 3 : variance de déplacement au nœud (4)

CONCLUSION:

Cet article a présenté la méthode stochastique basée sur le concept de la projection sur un chaos polynomial pour l'analyse robuste de comportement dynamique des systèmes non linéaire. La présente méthode permet une réduction importante du temps de calcul relativement à la méthode de référence de Monte-Carlo.. L'ordre du chaos joue un rôle important, plus il est élevé, meilleure est la solution trouvée, surtout pour des variations importantes des paramètres incertaines du système. L'étape suivante consistera à étendre cette méthode à des structures plus complexes

REFERENCES

- [1] Fishman G. S. Monte Carlo: Concepts, algorithms and Applications. Springer Verlag, 1996.
- [2] Sarsri D, Azrar L, Time response of structures with uncertain parameters under stochastic inputs based on coupled polynomial chaos expansion and component mode synthesis methods, Mechanics of Advanced Materials and Structures 2016 ;23(5):593-606.
- [3] J.-J. Sinou, J. Didier, B. Faverjon, Stochastic non-linear response of a flexible rotor with local non-linearities. International Journal of Non-Linear Mechanics; 2015;74: 92–99.
- [4] Kleiber M, Hien TD. The stochastic finite element method. Ed. Jhon Wiley; 1992.