

Contrôle actif des vibrations d'une poutre à gradient de propriété contenant des matériaux piézoélectriques

K. EL HARTI¹, M. SANBI², M. RAHMOUNE¹, R. SAADANI¹,
R. AGOUNOUN¹, M. BENTALEB¹, MED. RAHMOUNE³

¹ Laboratoire d'Etudes des Matériaux Avancés et Applications, FSM-ESTM, Université Moulay Ismail, Meknès, Maroc.

² Ecole Nationale des Sciences Appliquées, Université Abdelmalek Essaadi, Tétouan, Maroc.

³ Ecole Nationale des Sciences Appliquées, Université Mohammed Premier, Oujda, Maroc.

Résumé

Ce travail présente une étude dynamique des poutres sandwichs contenant des couches en matériaux à gradient de propriété (FGM) et des couches piézoélectriques, en utilisant la théorie d'Euler-Bernoulli. Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant le principe d'Hamilton. Les fréquences de vibration sont trouvées par la résolution du problème aux valeurs propres. La théorie proposée pour le comportement dynamique des piézopoutres sandwichs à gradient de propriétés est exploitée ensuite dans la formulation des lois de contrôle actif en utilisant le contrôle optimal LQG accompagné du filtre de Kalman.

Mots clefs :

Poutre multicouches, Matériaux à Gradient de Propriétés, Piézoélectricité, Vibration, élément finis, Euler-Bernoulli, Contrôle LQG-Kalman.

Introduction

L'industrie moderne est à la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels comme la légèreté, une bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée, une maintenance réduite, un temps de fabrication réduit... Un matériau classique ne permet de combiner toutes ces caractéristiques. Pour atteindre cet objectif, il faut utiliser des matériaux composites. Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans diverses structures d'ingénierie grâce à leurs performances. Par exemple, une couche élastique homogène en céramique peut être collée sur la surface d'une structure métallique et agit en tant que barrière thermique dans un environnement à hautes températures. Cependant, en raison d'une interface distincte entre les deux matériaux (céramique et métallique), les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement soudain, qui produit le saut d'effort et peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface. Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation de matériaux à gradient fonctionnel. Ces matériaux sont une nouvelle génération de composites présentés en 1990 par des scientifiques japonais [1], pour lesquels des propriétés matérielles, tel que module de Young, masse volumique et coefficient de poisson varient continuellement, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux homogènes et feuilletés dans le maintien de l'intégrité de la structure.

L'analyse des structures composites a connu un essor avec l'apparition des méthodes numériques notamment la méthode des éléments finis. Parmi les phénomènes physiques qui agissent sur les structures pendant leur durée de vie le phénomène des vibrations et les conditions d'environnement. Donc le contrôle actif des vibrations des composites multicouches dans un environnement thermique mérite bien d'être étudié.

L'objectif de ce travail est l'analyse du comportement vibratoire d'une poutre multicouche PZT/FGM/PZT en utilisant la méthode des éléments finis et puis son contrôle actif via les éléments piézoélectriques PZT.

1. Modèle Mathématique

Considérons une poutre de longueur L dans la direction x , de section rectangulaire avec la largeur b dans la direction y et l'épaisseur h dans la direction z comme représenté sur la figure 1. La poutre est constituée d'un matériau à gradient fonctionnel composé de métal et de céramique, entièrement couverte par un actionneur et capteur piézoélectriques collés sur les faces supérieure et inférieure de la peau en FGM [2].

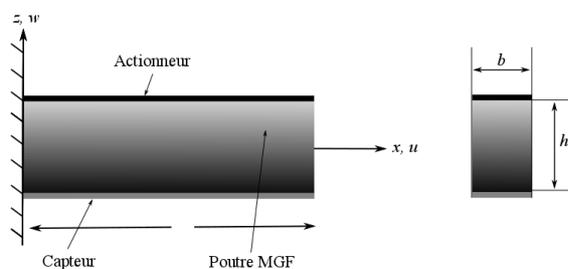


Figure 1: Géométrie d'une poutre en FGM contenant deux couches piézoélectriques encastrée-libre.

Dans cette étude, une simple loi de puissance est considérée comme décrivant la variation des propriétés du matériau à partir du métal pur à la face inférieure $z = -h/2$ jusqu'à une céramique pure à la face supérieure $z = +h/2$ de la poutre.

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k = 1 - V_m \quad (1)$$

Où V_c et V_m sont les fractions volumiques des constituants céramique et métallique respectivement et k est l'exposant de la fraction volumique qui dicte le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur de la poutre.

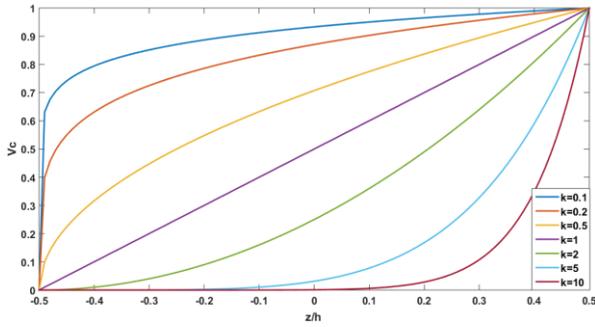


Figure2 : Variation de la fraction volumique en fonction de l'épaisseur.

Par conséquent, les propriétés matérielles de la poutre, c'est-à-dire le module d'Young E et la densité de masse ρ varient continuellement suivant la direction de l'épaisseur (axe z).

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (2)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (3)$$

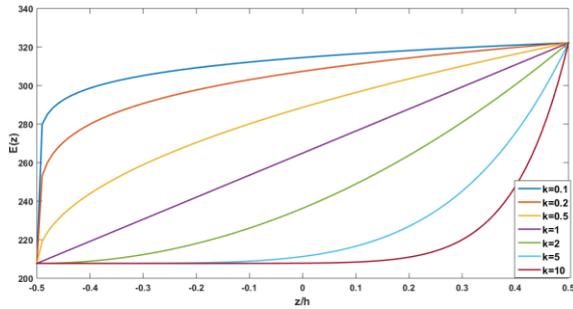


Figure3 : Variation de module d'Young en fonction de l'épaisseur.

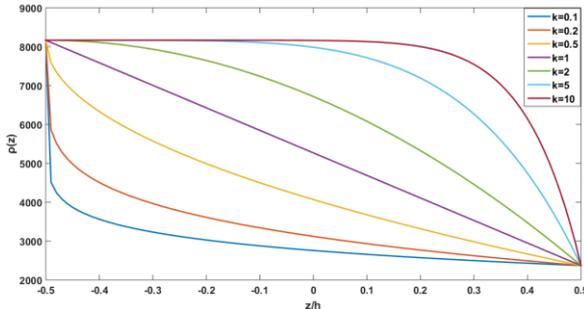


Figure4 : Variation de la masse volumique en fonction de l'épaisseur.

Où les indices m et c désignent respectivement les constituants métal et céramique.

En considérant la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, le déplacement transversal W de tout point de la poutre est donné par :

$$W(x, y, z, t) = w(x, t) \quad (4)$$

La dynamique due au comportement à la déformation de l'élément encasté-libre est gouvernée par l'équation différentielle d'ordre quatre suivante [3] :

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f_{ext} \quad (5)$$

Avec c une constante donnée par $c = \left(\frac{EI}{\rho A} \right)$. De plus E , I , ρ , A et f_{ext} sont respectivement, le module d'Young, le

moment quadratique, la masse volumique, la surface de l'élément et la distribution des forces appliquées à l'extrémité de la poutre.

La solution de l'équation est supposée avoir une forme cubique en fonction de x et s'écrit :

$$w(x, t) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (6)$$

En se basant sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli, et en utilisant les conditions aux limites pour 2ddl par nœud, la forme finale de $w(x, t)$ devient :

$$\begin{aligned} [w(x, t)] &= [f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)] [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \\ [w(x, t)] &= [n^T] [q] \end{aligned} \quad (7)$$

L'énergie de déformation U et l'énergie cinétique T de l'élément au niveau de la section droite de la poutre s'écrivent [4] :

$$U = \frac{EI}{2} \int_L \left[\frac{\partial^2 w^2}{\partial x^2} \right] dx = \frac{EI}{2} \int_L [w''(x, t)]^T [w''(x, t)] dx \quad (8)$$

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_L \left[\frac{\partial^2 w^2}{\partial t^2} \right] dt = \frac{\rho A}{2} \int_L [\dot{w}(x, t)]^T [\dot{w}(x, t)] dt \quad (9)$$

L'équation de mouvement de l'élément à deux nœuds est obtenue en remplaçant les équations (8) et (9) dans l'équation de Lagrange suivante :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] + \left[\frac{\partial U}{\partial q_i} \right] = [Z_i] \quad (10)$$

Ce qui donne

$$M \ddot{q} + K q = f(t) \quad (11)$$

2. Equation dynamique et modèle d'espace d'état

Nous nous intéressons au contrôle des premiers modes de vibrations de la poutre encastée. Nous utilisons la transformation $q = Tg$, avec T est la matrice modale. Nous considérons l'amortissement proportionnel de Rayleigh [5,6]:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (12)$$

L'équation dynamique de la structure et celle du contrôle sont finalement données par :

$$M^* \ddot{g} + C^* \dot{g} + K^* g = f_{ext}^* + f_{ctrl}^* \quad (13)$$

$$y(t) = V^s(t) = p^T \dot{q} = p^T T \dot{g} \quad (14)$$

Le modèle d'espace d'état en mode SISO de la poutre pour les trois premiers modes vibratoire est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) + Er(t) \\ y(t) &= C^T x(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Où $r(t)$, $u(t)$, A , B , C , D , E , $x(t)$ et $y(t)$ représentent, respectivement, la force d'entrée, l'entrée de contrôle, la matrice du système, la matrice d'entrée, la matrice de sortie, la matrice de transmission, la matrice des charges externes, le vecteur d'état et la sortie du système.

3. Résultats et discussion

Dans le but de valider notre procédure de contrôle, nous considérons une poutre flexible encastée à son extrémité

gauche et composée d'une peau en FGM, entièrement couverte par deux couches minces piézoélectriques en PZT. Les caractéristiques géométriques et physiques relatives aux matériaux sont représentées sur le tableau

1.

Propriétés physiques	Peau MGF	Matériaux (PZT) Capteur/Actionneur
Longueur (m)	$L_b = 0,2$	$L_c = L_a = 0,2$
Largeur (m)	$B_b = 0,03$	$B_c = B_a = 0,03$
Epaisseur (m)	$h_b = 0,001$	$h_c = h_a = 0,0005$
Masse volumique (Kg/m ³)	$\rho_m = 8166$ $\rho_c = 2370$	$\rho_p = 7700$
Module d'Young (G Pa)	$E_m = 207,7$ $E_c = 322,2$	$E_p = 68,1$
Constante de déformation (PZT) (m/V)		$d_{31} = 125 \times 10^{-12}$
Constante de contrainte PZT (Vm/N)		$g_{31} = 10,5 \times 10^{-3}$

Tableau 1 : Propriétés de la peau en MGF constituant le cœur et les pastilles piézoélectriques sur les surfaces.

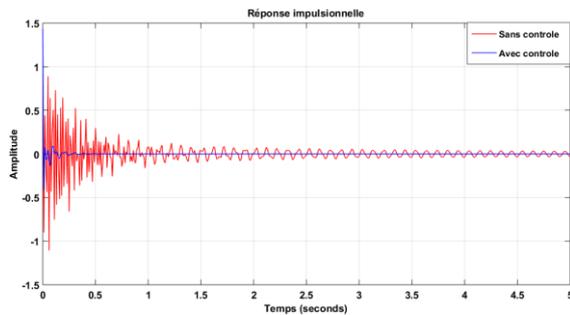


Figure 5 : Réponse à une impulsion d'une poutre PZT/FGM/PZT ($k = 0.2, Q = 10^5, R = 1, R_c = 100$).

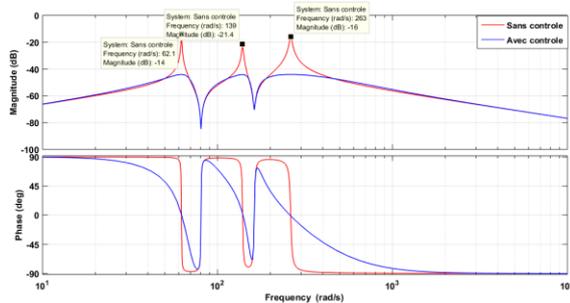


Figure 6 : Fréquences et amplitudes des trois premiers modes de la poutre ($k = 0.2$).

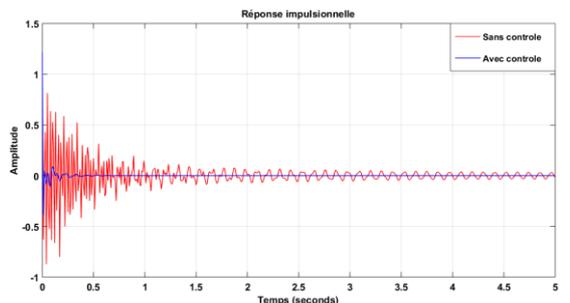


Figure 7 : Réponse à une impulsion d'une poutre PZT/FGM/PZT ($k = 1, Q = 10^5, R = 1, R_c = 100$).

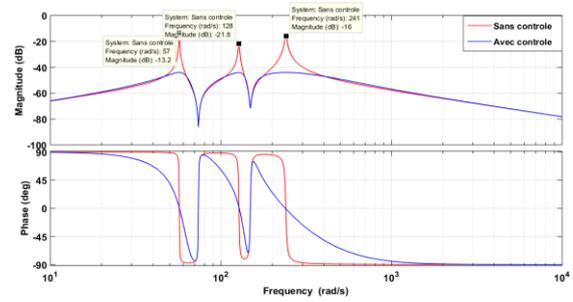


Figure 8 : Fréquences et amplitudes des trois premiers modes de la poutre ($k = 1$).

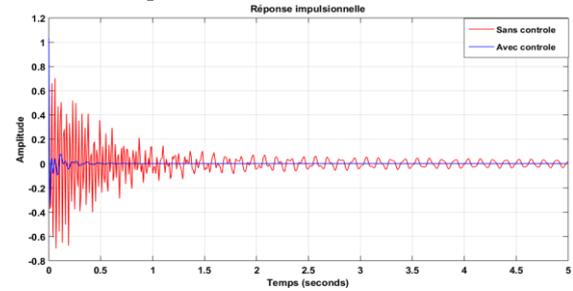


Figure 9 : Réponse à une impulsion d'une poutre PZT/FGM/PZT ($k = 10, Q = 10^5, R = 1, R_c = 100$).

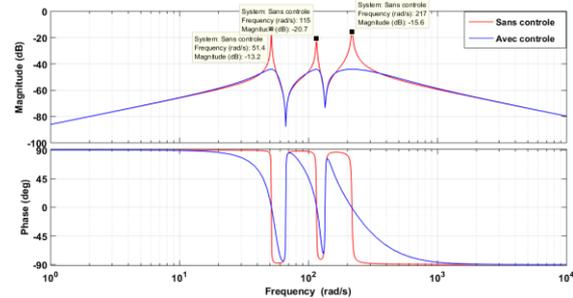


Figure 10 : Fréquences et amplitudes des trois premiers modes de la poutre ($k = 10$).

4. Conclusion

A partir de la modélisation et des résultats de la simulation numériques d'une poutre composite incluant la masse et la raideur du capteur/actionneur, nous constatons que la variation de l'exposant de la fraction volumique provoque un changement considérable des caractéristiques structurales et vibratoires de la poutre d'une part et du contrôle actif de ses vibrations d'autre part.

5. Références

- [1] A. BOUKHZER, K. EL BIKRI and R. BENAMAR, *Geometrically Non-Linear Free Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates*, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering Vol.7, No.11, (2013).
- [2] M. N. ELMAGURI and M. HATERBOUCH, *Geometrically nonlinear free vibration of functionally graded beams*, J. Mater. Environ Sci. Vol. 6, (2015).
- [3] N. RIZET, *Contrôle actif de vibration utilisant des matériaux piézo-électriques*, Thèse, Institut national des sciences appliquées de Lyon, (1999).
- [4] Z. FRIEDMAN and JB. KOSMATAKA, *An improved two-node Timoshenko beam finite element*, Computers and structures, Vol. 47, No. 3, pp. 473-481, (1999).
- [5] Y. DEBARD, *Méthode des éléments finis : poutre soumise à un effort normal*, Mans, (2011).
- [6] E. BOYERE, *Modélisation de l'amortissement en dynamique*, Clé : R5.05.04, 2011.