

Effet d'une modulation quasi-périodique du gradient de température sur la stabilité d'une couche fluide confinée entre deux parois horizontales

A. ELJAOUAHIRY¹, S. ANISS²

1, 2 Université Hassan II - Casablanca, Faculté des Sciences Ain Chock, Laboratoire de Mécanique Km 8 Route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc
 abdelouahab.eljaouahiry@gmail.com

Résumé :

Ce travail porte sur l'étude des effets d'une modulation quasi-périodique des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil convectif d'une couche liquide horizontale et d'extension infinie. Dans ce cadre, nous supposons que le gradient de température imposé résulte de la superposition d'une composante stationnaire et d'une composante quasi-périodique variable au cours du temps, avec deux fréquences ω_1 et ω_2 incommensurables, *i.e.*, leur rapport est un nombre irrationnel. Nous montrons que la modulation quasi-périodique du gradient de température a un effet stabilisant ou déstabilisant dépendant du rapport des fréquences, ce paramètre joue donc un rôle important dans le contrôle du seuil de convection.

Mots clés : Convection, Stabilité linéaire, Modulation quasi-périodique

1 Introduction

La convection de Rayleigh-Bénard, a été largement étudiée et a fait l'objet de plusieurs investigations dans le cas d'une modulation à la frontière. Dans ce cadre, Yih et Li [1] ont montré pour une modulation périodique en opposition de phase, en utilisant une méthode de Galerkin, que le seuil critique de convection correspond soit à des solutions harmoniques soit à des solutions sous harmoniques et qu'il peut être retardé ou accéléré en fonction de l'amplitude et de la fréquence de la modulation. L'influence d'une modulation périodique sur l'instabilité convective a été largement étudiée, néanmoins seuls quelques travaux ont été consacrés à l'étude de l'effet d'une modulation quasi-périodique sur la convection. En effet, Boulal et *al.* [2] ont étudié l'effet d'une modulation gravitationnelle quasi-périodique avec deux fréquences incommensurables sur la stabilité d'une couche fluide chauffée par le haut ou par le bas. Le seuil d'instabilité convectif a été déterminé pour ces deux cas. Ils ont été montré que le rapport des fréquences a un effet stabilisant ou déstabilisant sur le seuil convectif. Dans ce travaux [2], le système d'équations de conservation a été ré-

duit à une équation de Mathieu quasi-périodique en utilisant une méthode de Galerkin tronquée au premier ordre. Puisque la théorie de Floquet ne peut être appliquée dans le cas quasi-périodique, l'approche utilisée pour obtenir les courbes de stabilité marginales est celle de la méthode des balances harmoniques [3]. Dans le présent travail, nous étudions l'effet de la modulation quasi-périodique du gradient de température sur la stabilité d'une couche fluide confinée entre deux parois horizontales d'extension infinie. Nous avons montrons que la modulation avec deux fréquences incommensurables permet de contrôler le seuil de convection, via le rapport des fréquences, et produit un effet stabilisant ou déstabilisant.

2 Définition et formulation du problème

On considère un fluide Newtonien confiné entre deux parois horizontales d'extensions infinies dans les directions x^* et y^* . La température $T_1 + T_m \cos(\omega_1^* t^*)$ est imposée sur la paroi située en $z^* = \frac{d}{2}$ et la température $T_o + T_m \cos(\omega_2^* t^*)$ est imposée en $z^* = -\frac{d}{2}$ (figure 1), où d représente la distance entre les deux parois. Les fréquences ω_1 et ω_2 sont incommensurables et leur rapport est irrationnel. L'équilibre de la couche fluide correspond à un champ de vitesse nul et à un champ de température adimensionnel, $T_e = \frac{T^* - T_1}{T_o - T_1}$, solution de l'équation de température adimensionnelle :

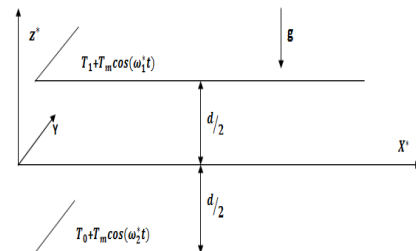


FIGURE 1 – Couche fluide horizontale soumise à une modulation à deux fréquences

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} \quad (1)$$

et les conitions aux limites sont :

$$T_e = b \cos(\omega_1 t) \text{ en } z = 1/2 \quad (2)$$

$$T_e = 1 + b \cos(\omega_2 t) \text{ en } z = -1/2 \quad (3)$$

$$b = \frac{T_m}{T_o - T_1} \quad (4)$$

où $\omega_1 = \omega_1^* d^2 / \kappa$, $\omega_2 = \omega_2^* d^2 / \kappa$, $(x, y, z) = 1/d(x^*, y^*, z^*)$ et $t = t^* \kappa / d^2$; κ étant la diffusivité thermique du fluide. La solution de l'équation (1) est :

$$T_e = \frac{1}{2} - z + b F(z, t) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F(z, t) &= F_1(z) \cos(\omega_1 t) + F_2(z) \sin(\omega_1 t) + \\ &G_1(z) \cos(\omega_2 t) + G_2(z) \sin(\omega_2 t) \\ F_1(z) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(r_1(z + \frac{1}{2}))}{\sinh(r_1)} + \frac{\sinh(\bar{r}_1(z + \frac{1}{2}))}{\sinh(\bar{r}_1)} \right] \\ F_2(z) &= \frac{i}{2} \left[\frac{\sinh(r_1(z + \frac{1}{2}))}{\sinh(r_1)} - \frac{\sinh(\bar{r}_1(z + \frac{1}{2}))}{\sinh(\bar{r}_1)} \right] \\ G_1(z) &= \frac{-1}{2} \left[\frac{\sinh(r_2(z - \frac{1}{2}))}{\sinh(r_2)} + \frac{\sinh(\bar{r}_2(z - \frac{1}{2}))}{\sinh(\bar{r}_2)} \right] \\ G_2(z) &= \frac{i}{2} \left[-\frac{\sinh(r_2(z - \frac{1}{2}))}{\sinh(r_2)} + \frac{\sinh(\bar{r}_2(z - \frac{1}{2}))}{\sinh(\bar{r}_2)} \right] \end{aligned}$$

avec $r_1 = (1+i)\beta_1$, $r_2 = (1+i)\beta_2$, $\beta_1 = \sqrt{\omega_1/2}$, $\beta_2 = \sqrt{\omega_2/2}$. En superposant a cette solution des perturbations infinitesimales en pression, temperature et vitesse $(p', T', \mathbf{V}'(u', v', w'))$, nous obtenons les equations de conservation adimensionnelles et linéarisées suivantes en approximation de Boussinesq[6] :

$$[Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta] \Delta w' = Ra \Delta_2 T' \quad (6)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + w' \frac{\partial T_e}{\partial z} = \Delta T' \quad (7)$$

où $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, Pr est le nombre de Prandtl, $Pr = \nu / \kappa$, le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{\beta g (T_0 - T_1) d^3}{\nu \kappa}$, où ν est la viscosité cinématique. Nous cherchons la solution du système, (6)-(7), en mode normaux sous la forme : $(w', T')(x, y, z, t) = (\tilde{w}, \tilde{T}) \exp(ik_x x + ik_y y)$ où les quantités k_x et k_y représentent respectivement les nombres d'onde dans les deux directions horizontales x et y . En introduisant les expressions ci-dessus dans le système d'équations, (6)-(7), nous obtenons :

$$(Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - M) M \tilde{w} + k^2 Ra \tilde{T} = 0 \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - M \right) \tilde{T} + \frac{\partial T_e}{\partial z} \tilde{w} = 0 \quad (9)$$

Où $M = \frac{d^2}{dz^2} - k^2$ avec $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\tilde{T} = \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \text{ en } z = \pm 1/2 \quad (10)$$

3 Procédure numérique

Pour la résolution spatiale de notre problème (8) – (10), nous utilisons une méthode spectrale faisant appel aux polynômes de Chebyshev se basant sur les points de collocation de Gausse-Lobatto [4]. Les polynômes de Chebyshev sont définis dans $[-1; 1]$. Il est donc nécessaire d'effectuer le changement de variable : $z_\tau = 2z$. Nous effectuons aussi un changement de variable $\tau = \omega_1 t$ et en introduisant le rapport des fréquences irrationnel $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ qui peut être approché par un nombre rationnel $\omega = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers [3]. Dans ce cas la théorie de Floquet [5] peut être appliquée pour déterminer le critère de stabilité. Le système d'équations (8) – (10) s'écrit sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= (\mathbf{A}_0 + \mathbf{C}_1 \cdot \cos(q\tau) + \mathbf{S}_1 \cdot \sin(p\tau) + \\ &\mathbf{C}_2 \cdot \cos(q\tau) + \mathbf{S}_2 \cdot \sin(p\tau)) \phi \end{aligned} \quad (10)$$

où les matrices \mathbf{A}_0 , \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 et \mathbf{B} sont d'ordre $2N$.

4 Analyse des résultats numériques

Sur la figure 2, nous avons reproduit les résultats de Yih et Li [1] concernant les effets d'une modulation thermique en opposition de phase d'une couche liquide Newtonienne et d'extension infinie, le nombre de Rayleigh augmente à partir de la valeur du cas non modulé ($Rac = 1707.8$; $kc = 3.117$; $b = 0$). Le seuil de convection correspond a des solutions harmoniques ou sous harmoniques.

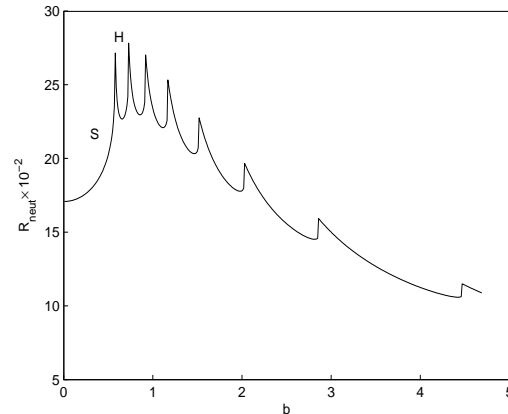


FIGURE 2 – Courbes de stabilité marginale du nombre de Rayleigh, Ra , en fonction de l'amplitude b : $Pr = 0.73$; $k = 3.117$; $k = 3.117$; $\omega = 5$. S(harmonique) et H(sous-harmonique).

Sur la figure 3, nous présentons, l'évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c , et du nombre d'onde critique, k_c , en fonction de l'amplitude, b , pour $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{37}$, $Pr = 1$, $\omega_1 = 50$. Lorsque b tend vers zéros, les nombres de Rayleigh critique et d'onde critique tendent, respectivement, vers les valeurs du seuil stationnaire du cas non modulé : $Ra_c = 1707.8$ et $k_c = 3.1$ [6]. La modulation des conitions aux limites a un effet stabilisant. Pour les courbes correspondantes à $\omega = \sqrt{2}$, $\omega = \sqrt{3}$, $\omega = \sqrt{5}$, $\omega = \sqrt{11}$ et $\omega = \sqrt{37}$, figure 4, où on est en présence d'un effet stabilisant, la courbe correspondante à $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donne lieu à un effet stabilisant ou déstabilisant ; dépendant de l'amplitude b . Finalement, la figure 5 illustre, pour $Pr=1$, $b=0.5$, la variation du nombre de Rayleigh critique et d'onde critique en fonction de la fréquence adimensionnelle ω_1 , pour différentes valeurs du rapport des fréquences.

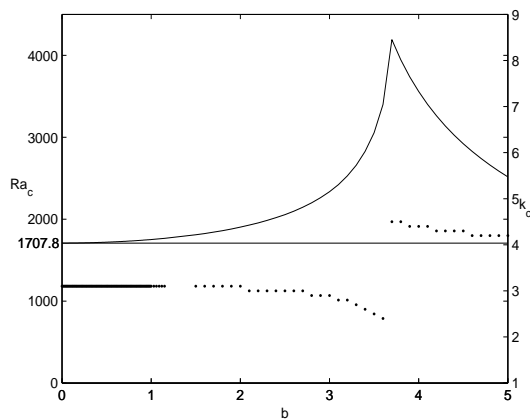


FIGURE 3 – Evolution du nombre de Rayleigh critique, Ra_c , et du nombre d'onde critique, k_c , en fonction de l'amplitude b pour $Pr = 1$; $\omega_1 = 50$; $\omega = \sqrt{37}$.

On montre que le nombre de Rayleigh critique, décroît quand ω augmente et donc l'effet stabilisant d'écroît avec ω . Notons que pour les grandes valeurs de ω_1 , le nombre de Rayleigh critique pour toutes les courbes tracés, tend vers la valeur du cas non modulé, $Ra_c = 1707.8$.

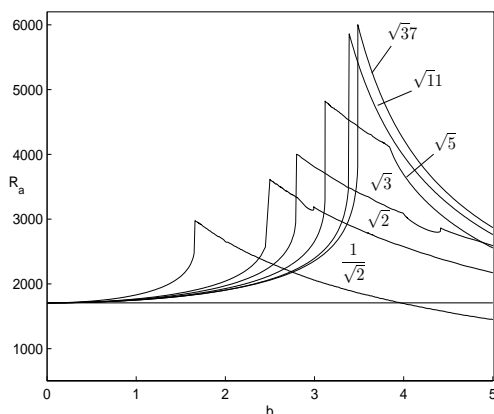


FIGURE 4 – Courbes de stabilité marginale du nombre de Rayleigh, Ra , en fonction de l'amplitude b pour $Pr=1$, $k=3.10$, $\omega_1 = 50$.

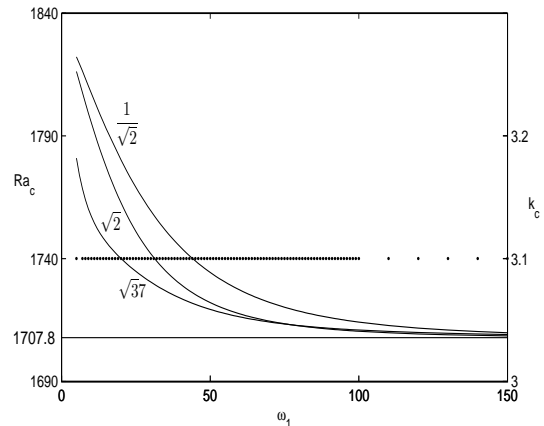


FIGURE 5 – Evolution du nombre de Rayleigh critique, Ra_c , et du nombre d'onde critique, k_c , en fonction de la fréquence adimensionnelle ω_1 pour $Pr=1$, $b=0.5$.

5 Conclusion

Nous avons étudié l'effet de la modulation quasi-périodique du gradient de température sur la stabilité d'une couche fluide confinée entre deux parois horizontales d'extension infinie. L'effet du rapport des fréquences, ω , sur le seuil de convection a été observé. Nous avons montré que la modulation avec deux fréquences incommensurables produit un effet stabilisant ou déstabilisant selon la quasi-périodicité, ω

Références

- [1] C. S. Yih and C. H. Li, "Instability of unsteady flows or configurations. Part 2. Convective instability", *J. Fluid Mech.* **54**, pp. 143-152, (1972).
- [2] T. Boulal, S. Aniss, M. Belhaq, R. Rand, "Effect of quasiperiodic gravitational modulation on the stability of a heated fluid layer", *Phys. Rev. E*, **76** (52), p. 56320, (2007).
- [3] R. S. Zounes, R. Rand, "Transitocurves for the quasi-periodic Mathieu equation", *SIAM J. Appl. Math.*, **58**, pp. 1094-1115, (1998).
- [4] L. N. Trefethen, *Spectral Methods Matlab*, SIAM (2000).
- [5] A.H. Nayfeh, D. Mook, *Nonlinear Oscillation*, Wiley, New York, (1979) 276-296.
- [6] S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford University Press, London, (1961).