

Flambage thermique des structures composites ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température

F.Abdoun¹, L.Azrar^{1,2}, E.M. Daya³

1. Laboratoire MAT, ENSET, Université Mohammed V, Rabat, Maroc
2. Department of Mechanical Engineering; Faculty of Engineering, KAU, Jeddah, Saudi Arabia
3. LEM3, UMR CNRS 7239, Université de Lorraine, Île de Saulcy, 57045 Metz, France

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées minces ayant des propriétés matérielles qui dépendent de la température. Une Méthode Asymptotique Numérique a été développée pour ce problème et permet de déterminer les températures critiques de ces structures. Cette méthode est basée sur la méthode des éléments finis et la méthode d'homotopie. Les températures critiques de flambage et les modes associés des plaques thermoplastiques et dont les paramètres dépendent non-linéairement de la température ont été déterminés.

Mots clés : Méthode des éléments finis, homotopie, matériaux composites, plaques stratifiées, propriétés thermo-élastiques, flambage thermique.

1. Introduction

Les structures composites stratifiées sont largement utilisées dans les industries aérospatiale, marine et automobile et ces structures sont souvent soumises à des températures élevées. Ce type de chargement thermique peut influencer énormément les propriétés thermo-élastiques de ces structures et par conséquent leurs caractéristiques de stabilité.

La plupart des recherches sur le flambement thermique ont été consacrées à des structures minces, [1,2] dans lesquelles les propriétés élastiques et thermiques sont considérées indépendantes de la température. Cependant, les propriétés élastiques et thermiques varient avec le changement de la température. L'effet d'un matériau dépendant de la température abaisse les températures critiques du flambement et augmente les déformations après le flambement. Certaines études du flambage thermique des composites laminés, en considérant un matériau dépendant de la température ont été présentées dans [3-5].

Dans le présent travail, les propriétés thermiques et élastiques dépendent non-linéairement de la température. L'analyse du flambement thermique des plaques composites soumises à une température

uniforme est étudiée en utilisant la méthode des éléments finis. Les paramètres des propriétés mécaniques ainsi que la dépendance à la température du matériau des structures composites seront discutés. Une méthodologie mathématique et numérique pour le calcul des températures critiques du flambage a été développée.

2. Formulation mathématique

Dans cette partie, on étudie le flambage des plaques stratifiées (figure 1) en utilisant la méthode asymptotique numérique et la technique de l'homotopie [6,7]. Le développement en série du déplacement et de la température nous ramène à la résolution d'une série de problèmes linéaires.

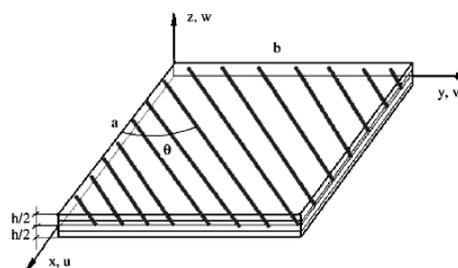


Figure 1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire laminée

2.1 Equation du mouvement

D'après la loi de Hooke généralisée, les relations constitutives des plaques laminées prenant en compte l'effet thermique peuvent être écrites par les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(T)} & \bar{Q}_{12}^{(T)} & 0 \\ \bar{Q}_{12}^{(T)} & \bar{Q}_{22}^{(T)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}^{(T)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Avec $[\bar{Q}_{ij}(T)]$ sont les coefficients de la matrice de rigidité. $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$ sont les coefficients transformés de la dilatation thermique et ΔT est la variation de la température.

Après intégration dans l'épaisseur, les efforts internes généralisés sont données par :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2)$$

$$D'où: \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon' \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \quad (3)$$

avec : A, B and D sont respectivement les matrices de rigidité de flexion, flexion-membrane et de membrane, qui dépendent de la température et qui sont définies par :

$$\begin{aligned} & [A_{ij}(T), B_{ij}(T), D_{ij}(T)] = \\ & \sum_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} Q_{ij}(T)(1, z, z^2) dz \end{aligned} \quad (4)$$

L'effort et le moment thermique résultants sont définis par :

$$\begin{aligned} \{N^T\} &= \sum_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} Q_{ij}(T) \alpha(T) \Delta T dz \quad (5-a) \\ \{M^T\} &= \sum_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} Q_{ij}(T) \alpha(T) z \Delta T dz \quad (5-b) \end{aligned}$$

En utilisant la méthode des éléments finis, le problème de flambage thermique est écrit sous forme d'un problème de valeurs propres non-linéaire, comme suit

$$[K_e(T)]\{U\} = T[K_g(T)]\{U\} \quad (6)$$

Avec $[K_e(T)]$ and $[K_g(T)]$ sont respectivement les matrices de rigidité et géométrique. Il est à noter que ces matrices peuvent dépendre non-linéairement de la température T.

Pour un formalisme plus explicite les propriétés matérielles de la structure dépendent linéairement de la température:

$$\begin{aligned} E_1(T) &= E_{10}(1 + E_{11}T), E_2(T) \\ &= E_{20}(1 + E_{21}T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{12}(T) &= G_{120}(1 + G_{121}T), \alpha_1 = \alpha_{10}(1 + \alpha_{11}T) \\ \alpha_2 &= \alpha_{20}(1 + \alpha_{21}T) \end{aligned} \quad (7)$$

Le coefficient de Poisson ν est considéré indépendant de la température.

Le problème de valeurs propres non-linéaire (6), peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [K_{e0}]\{U\} &= T \cdot ([K_{g0}] - [K_{e1}])\{U\} \\ &+ (T^2[K_{g01}])\{U\} \\ &+ T^3[K_{g11}]\{U\} \end{aligned} \quad (8)$$

Une méthode numérique a été développée pour le calcul des températures critiques ainsi que les modes propres associées.

2.2 Résolution du problème

Pour résoudre un problème aux valeurs propres dépendant de la température, on peut utiliser une méthode d'homotopie et évaluer la branche de solutions par la MAN [7]. Cette méthode consiste à introduire un coefficient ε dans le terme non linéaire du problème (6) :

$$\begin{cases} [K_{e0}]\{U\} = \\ T \cdot ([K_{g0}] - [K_{e1}])\{U\} + \varepsilon(T^2[K_{g01}]\{U\} + T^3[K_{g11}]\{U\}) \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

Puis, on cherche le couple inconnu T et $\{U\}$ sous forme de série entière du paramètre ε . La solution du problème (6) est alors obtenue, à partir de celle du problème (9) pour $\varepsilon = 1$.

Partons d'une solution initiale connue (U_0, T_0) , on suppose que la branche de solution est analytique au voisinage de cette solution et T_0 est la valeur propre obtenue par la résolution du problème flambage thermique [6,7]. Nous cherchons alors $U(T)$ à l'aide d'une représentation paramétrique $(U(\varepsilon), T(\varepsilon))$ sous forme de séries entières par rapport à un paramètre ' ε ' :

$$\begin{cases} T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots + \varepsilon^n T_n \\ T^2 = p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots + \varepsilon^n p_n \\ T^3 = c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots + \varepsilon^n c_n \\ U = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots + \varepsilon^n U_n \end{cases} \quad (10)$$

En injectant les séries (10) dans l'équation (9) et en identifiant suivant les puissances de ' ε ', on obtient la séquence des problèmes linéaires suivants :

Ordre 0 :

$$[K_{e0}]\{U_0\} = T_0 \cdot ([K_{g0}] - [K_{e1}])\{U_0\} \quad (11a)$$

Ordre 1 :

$$\begin{aligned} & ([K_{e0}] - T_0([K_{g0}] - [K_{e1}]))\{U_1\} \\ &= T_1 \cdot ([K_{g0}] - [K_{e1}])\{U_0\} + (T_0^2 [K_{g01}])\{U_0\} + \\ & T_0^3 [K_{g11}]\{U_0\} \end{aligned} \quad (11b)$$

Ordre k≥2 :

$$\begin{aligned} & ([K_{e0}] - T_0([K_{g0}] - [K_{e1}]))\{U_k\} \\ &= T_k \cdot ([K_{g0}] - [K_{e1}])\{U_0\} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} T_j \cdot ([K_{g0}] - [K_{e1}])\{U_{k-j}\}$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} p_j [K_{g01}]\{U_{k-j-1}\} + c_j [K_{g11}]\{U_{k-j-1}\}$$

(11c) :

avec :

$$\begin{cases} p_0 = T_0^2 \\ p_1 = 2T_0 T_1 \\ p_k = 2T_0 T_1 + \sum_{i=1}^{k-1} T_i T_{k-i} = 2T_0 T_1 + D_k, \text{ for } k \geq 2 \end{cases} \quad (12a)$$

$$\begin{cases} c_0 = T_0^3 \\ c_1 = 3T_0^2 T_1 \\ c_k = 3T_0^2 T_1 + D_k T_0 + \sum_{i=1}^{k-1} p_i T_{k-i} = 3T_0^2 T_1 + A_k, \text{ for } k \geq 2 \end{cases} \quad (12b)$$

Pour résoudre ces problèmes, on utilise la relaxation suivante :

$$\begin{Bmatrix} K_g & {}^t U_0 \\ U_0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_k \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_k^{nl} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Avec $[K_g] = ([K_{e0}] - T_0([K_{g0}] - [K_{e1}]))$

et $\{F_k^{nl}\} = T_k \cdot ([K_{g0}] - [K_{e1}])\{U_0\} + \sum_{j=1}^{k-1} T_j \cdot ([K_{g0}] - [K_{e1}])\{U_{k-j}\} +$

$\sum_{j=0}^{k-1} p_j [K_{g01}]\{U_{k-j-1}\} + c_j [K_{g11}]\{U_{k-j-1}\}$ Les problèmes Eqs. (11.b, c) ont la même matrice. Ainsi, une

seule inversion matricielle est nécessaire pour tous les vecteurs U_j . Cette approche méthodologique permet de calculer les coefficients de la série de puissance T_j et U_j à n'importe quel ordre requis. Sur la base de cette approche, le cheminement d'équilibre thermique après le flambage peut être facilement étudié pour des plaques de différentes formes, différentes conditions aux limites et différents modèles dépendants de la température.

3. Résultats numériques

Après avoir développé le formalisme mathématique du flambage thermique en appliquant la MAN, nous nous contentons de présenter quelques applications pour valider la méthode proposée. Pour cette fin, nous comparons nos résultats numériques avec ceux trouvés dans la littérature [3].

Les températures critiques d'une plaque carrée ($a=b, a/h=100$) stratifiée $[-45^\circ/45^\circ]_6$ seront calculées en utilisant l'élément DKT18 avec un maillage de 20×20 .

Les propriétés mécaniques sont :

$$E_{10}/E_{20}=40, G_{120}/E_{20}=0,5, \nu_{12}=-0,25, \alpha_{10}=\alpha_{20}=10^{-6},$$

$$E_{11}=-0,5 \times 10^{-3}, E_{21}=G_{121}=-0,2 \cdot 10^{-3},$$

$$\alpha_{11}=\alpha_{21}=0,5 \cdot 10^{-3}.$$

Les conditions aux limites considérées sont :

- Simplement appuyée (SS) : - $u=v=w=0$ dans tous les bords.
- Encastrée (CC) : - $u=v=w=0$ et $R_y=0$ à $x=0, a$
- $u=v=w=0$ et $R_x=0$ à $y=0, b$.

Pour valider l'approche méthodologique actuelle pour le flambement thermique des plaques, on considère une plaque avec des propriétés dépendant de la température T-D. Ce problème a également été analysé par Chen [6] en utilisant la méthode des éléments finis et en basant sur le principe de l'énergie potentielle minimale.

Dans ce travail, les températures critiques du flambage thermique des plaques avec différentes conditions aux limites ont été obtenues par l'analyse modale et par l'homotopie. DT et IDT représentent respectivement les modèles de constantes élastiques et de coefficients de dilatation thermique dépendants et indépendants de la température respectivement. Pour le modèle IDT, les constantes $\alpha_{10}, \alpha_{20}, E_{11}, E_{21}, G_{121}, \alpha_{11}$ et α_{21} sont mises à zéro. L'effet des propriétés dépendant de la température sur le comportement thermique après le flambage des plaques SS et CC est présenté dans le tableau 1. L'effet des propriétés du matériau est démontré pour TD et IDT.

4- Conclusion

Nous avons mis au point un formalisme mathématique et numérique utilisant la méthode asymptotique numérique et la technique d'homotopie pour étudier le flambage thermique des structures stratifiées dont les caractéristiques peuvent dépendre non linéairement de la température. Les développements mathématiques ont été élaborés pour le flambage thermique et cela pour différents types de plaques stratifiées à caractéristiques dépendant fortement de la température. Ce travail sera étendu à l'étude du comportement du post-flambage thermo-élastique.

	a/b	Analyse modale		MAN+ homotopie		[3]	
		IDT	DT	IDT	DT	IDT	DT
SS	1	160,6	149,45	160,59	148,83	160,85	148,23
	1.5	243,03	219,14	243,03	217,13	238,82	216,18
CC	1	321,98	281,21	321,98	281,85	320	280
	1.5	528,85	436,29	528,85	436,47	531,43	437,33

Tableau 1 : Températures critiques du flambage thermique des plaques avec différentes conditions aux limites

Remerciements

Ce travail a été élaboré dans le cadre du projet PPR2 dont Prof AZRAR est coordinateur. Nous remercions le CNRS et le ministère MESRSFC pour le soutien financier à travers ce projet.

Références

- [1] G. Singh, G.Venkateswara Rao, N.G.R. Iyengar, *Thermal post buckling behavior of rectangular antisymmetric cross-ply composite plates*, ActaMechanica (1993), 98, 39-50.
- [2] M.K.Singha, L.S. Ramachandra, J.N. Bandyopadhyay, *Vibration behavior of thermally stressed composite skew plate*, Journal of Sound and Vibration (2006), 296, 1093-1102.
- [3] L.W. Chen and L.Y. Chen, *Thermal- post buckling behaviors of laminated composite plates with temperature-dependent properties*, Composite Structures 19 (1991), 267-283.
- [4] M. Shariyat, *Thermal buckling analysis of rectangular composite plates with temperature-dependent properties based on a layerwise theory*, Thin-Walled Structure 45 (2007), 439-52.
- [5] H-S Shen, *Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties*, International Journal of Mechanical Sciences 49 (2007) 466-478.
- [6] F. Abdoun, L. Azrar, E.M. Daya, and M. Potier-Ferry, *Forced vibrations of viscoelastic structures by an Asymptotic Numerical Method*, Computers & Structures, Volume 87, Issues 1-2, Pages 91-100, 2009.
- [7] E.M. Daya and M. Potier-Ferry. *A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures*. Computers & Structures, 79(5) :533 – 541, 2001.