

# SCHEMA DE CORRECTION DE LA VITESSE POUR LA FORMULATION VORTICITE-FONCTION DE COURANT DANS LES PROBLEMES DE CHANGEMENT DE PHASE

S. Kaba, A. Cheddadi & K. Achoubir

Auteur correspondant [cheddadi@emi.ac.ma](mailto:cheddadi@emi.ac.ma)

Equipe ERSTER, EMI, Rabat

## Résumé

Dans ce travail, nous proposons un schéma numérique de correction de la vitesse des problèmes de changement de phase. La formulation utilisée est une adaptation de la formulation enthalpie-porosité présentée par Voller & al (1987), à la formulation vorticité-fonction de courant, jusqu'ici peu utilisée pour la simulation numérique des problèmes de Fusion/Solidification.

Après avoir présenté le modèle physico-mathématique, nous présentons les résultats des comparaisons effectuées pour expérimenter cette approche en envisageant plusieurs cas de fusion/solidification disponibles dans la littérature.

On présente en particulier l'évolution de la fraction liquide, celle de la position de l'interface liquide-solide et le taux de transfert de chaleur. Ces comparaisons ont montré une bonne concordance avec les résultats des travaux objets de la comparaison.

**Mots clefs :** *Fusion, solidification, vorticité-fonction de courant, enthalpie-porosité*

## 1. Introduction

La modélisation numérique des changements de phase reste encore depuis plusieurs décennies un champ d'investigation très ouvert. Cela est dû à la présence des techniques de fusion et de solidification dans divers domaines technologiques : la fabrication des alliages métalliques à hautes puretés, le stockage d'énergie en termes de chaleur latente, l'industrie agroalimentaire et dans d'autres domaines.

Deux groupes de modèles numériques sont utilisés, les schémas à grilles fixes et les schémas à grilles déformées [1]. Ces derniers utilisent des systèmes de coordonnées transformées pour suivre l'évolution de l'interface, ce qui se traduit par un coût computationnel très élevé. Par contre les schémas à grille fixe déterminent la position de l'interface en se basant sur la distribution de la température/enthalpie, menant à un modèle mathématique plus simple. Plusieurs méthodes ont été proposées pour le traitement du problème de correction de la vitesse, on cite la méthode de la viscosité variable [2], la méthode du terme source [3], et la méthode du switch-off [4].

Ces méthodes utilisent la formulation vitesse-pression des équations de mouvement.

Le but du présent travail est d'appliquer une nouvelle approche pour la correction de la vitesse, qui sera adéquate avec la formulation vorticité-fonction de courant, en considérant un terme source de type Darcy. A partir des équations primitives on déduira l'équation de la vorticité avec un terme source convenable. La validation de cette approche a été entreprise en la comparant avec des résultats expérimentaux et numériques pour la fusion et la solidification.

## 2. Modèles et approximations numériques

La configuration étudiée est une cavité carrée différentiellement chauffée, les parois supérieure et inférieure étant adiabatiques. Le fluide considéré est supposé Newtonien, incompressible et en écoulement laminaire bidimensionnel. Les propriétés thermophysiques sont constantes sauf la densité qui est approchée dans le terme de gravité par l'hypothèse de Boussinesq. L'adimensionnalisation adoptée est de type thermique.

La formulation vorticité-fonction de courant ( $\Psi, \Omega$ ) que nous proposons a été dérivée des équations de mouvement à variables primitives qui contiennent le terme source de Darcy utilisé par Voller et Prakach [5], pour éteindre la vitesse dans la phase solide et la corriger dans la zone pâteuse.

Les équations adimensionnelles considérées s'écrivent :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = Pr \nabla^2 \Omega - Ra Pr \frac{\partial T}{\partial x} + S_{\Omega} \quad (1)$$

$$\Omega = -\nabla^2 \Psi \quad (2)$$

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}; v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T + S_T \quad (4)$$

Où Ra est le nombre de Rayleigh, Pr celui de Prandtl, SW et ST sont des termes sources. Les autres nombres adimensionnels sont le rapport de forme de la cavité, ici égal à 1, et le nombre de Stefan.

Les équations du mouvement Eq.(1-3) sont discrétisées selon la méthode des différences finies, l'équation de l'énergie Eq.4 est discrétisée selon la méthode des volumes finis, le schéma ADI (Alternating Direction

Implicit) a été appliqué. L'algorithme TDMA (Tridiagonal matrix algorithm) est utilisé pour la résolution des systèmes linéaires obtenus, le maillage est fixé à  $61 \times 61$ . La convergence est établie lorsque les écarts relatifs sont inférieurs à  $10^{-5}$  pour les champs dynamiques et thermiques.

### 3. Résultats et discussion

#### 3.1 Fusion de l'octadécane : $Ra = 3.27 \cdot 10^5$ , $Pr = 56.2$ , $Ste = 0.045$ , Maillage = $61 \times 61$

Ce cas concerne la fusion de l'octadécane dans une cavité carrée différentiellement chauffée, tel que cité dans les travaux de Faghri & al [6]. L'évolution de la fraction liquide Figure 1 montre une bonne concordance avec les résultats de ces auteurs. Cet accord est confirmé par l'évolution de la chaleur accumulée Figure 2, sachant que ces auteurs ont utilisé la méthode de transformation de la température, comme modèle de l'équation de la température et la consistent update technique (CUT) comme algorithme de couplage de vitesse-pression.

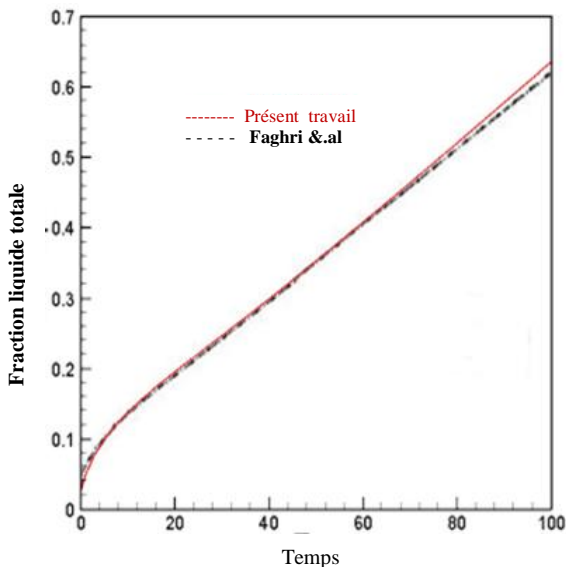


Figure 1 : Fusion de l'octadécane- Evolution de la fraction liquide

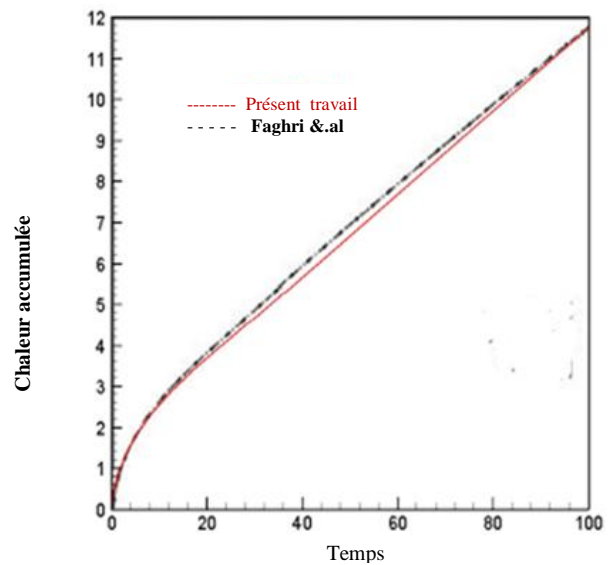


Figure 2 : Fusion de l'octadécane-Evolution de la chaleur accumulée

#### 3.2 Fusion de l'étain : $Ra = 2.5 \cdot 10^5$ , $Pr = 0.02$ , $Ste = 0.01$ , Maillage = $61 \times 61$

Le deuxième cas étudié concerne la fusion de l'étain dans une cavité carrée différentiellement chauffée, présentée dans le benchmark de Bertrand & al. [7]. Ce cas est caractérisé par la présence des instabilités au démarrage du régime convectif. Ces instabilités sont liées aux phénomènes rencontrés à la fin du régime conductif.

Ces instabilités traduites par la forme de l'interface et le nombre des cellules convectives (2 cellules convectives) comme le montre la figure 3, sont élucidées dans le présent travail par un maillage relativement grossier ( $61 \times 61$ ) par rapport à celui utilisé dans [7]

Les résultats du présent travail montrent une bonne concordance avec ceux du benchmark, cet accord est confirmé par l'évolution de l'interface figure 3, et l'évolution de la fraction liquide Figure 4.

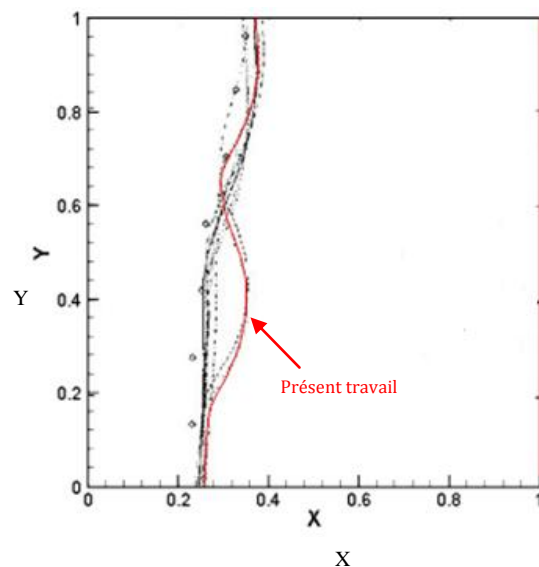


Figure 3 : Fusion de l'étain-Evolution de l'interface de fusion

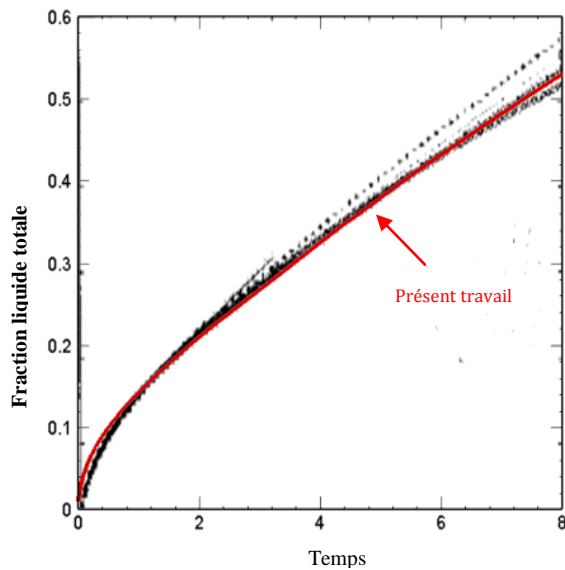


Figure 4 : Fusion de l'étain-Evolution de la fraction liquide

#### 4. Conclusion

Dans ce travail une nouvelle méthode numérique pour la correction de la vitesse adéquate avec la formulation vorticité-fonction de courant a été adoptée pour traiter les problèmes de fusion/solidification. Les résultats obtenus pour la fusion à haut et bas nombre de Prandtl sont satisfaisants en comparaison avec les travaux publiés basés sur les variables primitives.. Cette méthode a été par ailleurs étendue pour le traitement de la solidification (Pb-Sn), et donne de très bons résultats.

#### Références

- [1] Samarkii A. A; Vabischchevich P. N; Iliev O. P; Churbanov A.G, Numerical Simulation of Convection/Diffusion Problems—A Review. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 36, (1993) 4095-4106.
- [2] Gartling D.K, Finite element analysis of convective heat transfer problems with change of phase. *Computer Methods in Fluids*, Pentech, London, (1980) pp. 257-84.
- [3] Voller V.R; Cross, M.; Markatos N.C, An enthalpy method for convection/diffusion phase change. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 24, (1987) pp. 271-84.
- [4] Yang, M; Tao W.Q, numerical study of natural convection heat transfer in a cylindrical envelope with internal concentric slotted hollow cylinder. *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 22, (1992) pp. 289-305.
- [5] Voller V. R; Prakash C, a fixed grid numerical modeling methodology for convection–diffusion mushy region phase-change problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* 30, (1987) 1079–1718
- [6] Faghri & al, a comprehensive numerical for melting with natural convection. *Int. journal*

of heat and mass transfer, vol.53, (2010) pp.1985-2000.

- [7] Bertrand &.al, melting driven by natural convection. A comparison exercise: First result. *Int. journal of thermal science*, vol. 38, (1999) pp. 5-26.