

# L'effet d'un jet transversal sur la stabilité hydrodynamique de l'écoulement de Couette-Poiseuille plan d'un fluide rhéo-fluidifiant

M.LAMINE<sup>1</sup>, J.BENYZA, A. HIFDI

1. Université Hassan II, Faculté des Sciences Aïn Chock, Laboratoire de Mécanique Km 8 Route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc. mustapha.lamine@gmail.com

## Résumé

Une analyse de stabilité hydrodynamique d'un écoulement de Couette-Poiseuille plan d'un fluide en loi puissance en présence d'un écoulement transversal uniforme est effectuée. Le problème physique est réduit à une équation d'Orr-Sommerfeld modifiée. Cette équation a été résolue numériquement par la méthode spectrale de collocation de Chebychev. Notre effort se concentre sur les effets combinés de l'écoulement d'un jet transversal,  $R_C$ , et du mouvement d'une des parois sur le mode propre gouvernant la stabilité de l'écoulement en question. Les résultats obtenus montrent que l'écoulement transversal a un effet à la fois stabilisant et déstabilisant selon la gamme des  $R_C$  choisis. A fort débit du jet transversal, le fluide rhéo-fluidifiant, perd son caractère déstabilisant et se comporte comme un fluide Newtonien. Cette stabilité de l'écoulement est d'autant plus renforcée par le mouvement de la paroi à faible débit du jet transversal. L'augmentation de ce débit tend à éliminer l'influence de la paroi.

**Mots clés :** Stabilité hydrodynamique, Fluide rhéo-fluidifiant, écoulement de Couette-Poiseuille, écoulement transversal, Mode propre dominant, Méthode spectrale.

## 1. Introduction

L'analyse de stabilité linéaire d'un écoulement entre deux plaques planes parallèles en présence d'un jet transversal continue à attirer l'attention des chercheurs, en raison de son application pratique considérable dans l'industrie biomédicale, les systèmes de filtration et de génie de l'environnement. En effet, Hains [1] et Sheppard [2] ont effectué une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille plan (PP). À travers ces études, ils ont montré qu'une quantité modeste d'injection uniforme du même fluide produit une augmentation significative du nombre de Reynolds critique. Fransson et Alfredsson [3] ont apporté des corrections aux problèmes discutés en [1,2] et ils ont prouvé que la stabilité de ce problème dépend du choix de l'échelle des vitesses. En outre, ils ont montré l'effet stabilisant et déstabilisant du jet transversal. Ainsi, ils ont confirmé qu'à haut débit du jet transversal, le profil de vitesse est similaire à celui de Couette linéaire. Une extension de ce travail, a été traitée par Guha et Frigard [4] dans le cas de l'écoulement de Couette-Poiseuille plan (CPP). Les auteurs ont prouvé que la vitesse de la paroi a un effet stabilisant. Récemment, Lamine et Hifdi [5] montrent, contrairement à l'écoulement CPP, le sens du jet transversal n'a aucun effet sur la stabilité de l'écoulement PP.

Cependant, cette analyse de stabilité devient plus compliquée et difficile à traiter lorsqu'il s'agit des écoulements d'un fluide en loi puissance. Ces difficultés proviennent de l'obtention des solutions analytiques de base de tels écoulements pour un indice de comportement,  $n$ , donné.

Liu et al [6], ont étudié la stabilité d'un écoulement plan de Couette de fluide en loi Puissance en présence d'un écoulement transversal uniforme. Cette étude se limite à une solution de base d'un écoulement de Couette d'un fluide Newtonien. Ils formulent une loi empirique reliant le nombre de Reynolds critique de l'écoulement transversal pour les fluides en loi puissance avec celui des fluides Newtoniens.

Dans cette étude, nous effectuons une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de Couette-Poiseuille plan d'un fluide rhéo-fluidifiant, dans le cas  $n=0.5$ , en présence d'un jet transversal. Nous mettons en évidence l'influence du jet transversal et le mouvement de la paroi sur le comportement du mode propre dominant qui sont comparés au cas Newtonien ( $n=1$ ).

## 2. Modèle mathématique du problème physique

On considère dans le système de coordonnées cartésiennes  $(x^*, y^*)$ , un écoulement entre deux plaques planes, poreuses, parallèles et d'extensions infinies suivant la direction  $\mathbf{e}_x$ , séparées l'une de l'autre par une distance  $2h$ . La plaque inférieure ( $y^*=-h$ ) est fixe et la plaque supérieure ( $y^*=h$ ) est animée d'une vitesse constant  $U_c$ . Une injection transversale uniforme et de vitesse constante  $V_o$  est imposée au niveau de la paroi inférieure. La succion se fait à la même vitesse  $V_o$  au niveau de la paroi supérieure. Le fluide est incompressible, de masse volumique  $\rho$  et obéit à une loi puissance. Les équations mathématiques modélisant le problème sont :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla) \mathbf{V}^* \right] = -\nabla P^* + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^* \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0 \quad (2)$$

$$V_x^*(x^*, +h, t^*) = U_c \quad ; \quad V_x^*(x^*, -h, t^*) = 0 \quad (3-1)$$

$$V_y^*(x, \pm h, t) = V_o \quad (3-2)$$

où  $\mathbf{V}^* = (V_x^*, V_y^*)$  est le vecteur vitesse,  $P^*$  est la pression et  $\boldsymbol{\tau}^*$  le tenseur des contraintes défini dans le cas d'un fluide en loi puissance,  $n$ , par la loi de comportement suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4)$$

où  $\dot{\gamma}$  est le tenseur de taux de cisaillement et  $\eta (= m(\dot{\gamma}_{xy})^{n-1})$  est la viscosité. Les paramètres  $n$  et  $m$  représentent respectivement les indices de comportement et de consistance.

A l'état d'équilibre, nous nous limitons à des écoulements de base stationnaires et unidirectionnels, dont le champ de vitesse s'écrit :

$$V^*(y) = V_b^*(y)e_x + V_o e_y. \quad (5)$$

Dans ce travail deux types de fluides sont pris en compte : le fluide Newtonien correspondant à  $n=1$  et un fluide traissant le comportement rhéo-fluidifiant lorsque  $n=0.5$ . Dans ces conditions, les solutions de base en variables adimensionnelles ( $x = \frac{x^*}{h}, y = \frac{y^*}{h}, P = \frac{P^*}{\rho U_0^2}, V_x = \frac{V_x^*}{U_0}, V_y = \frac{V_y^*}{U_0}$  et  $\tau = \frac{\tau^*}{\rho U_0^2}$ ) s'écrivent :

- Dans le cas du fluide Newtonien ( $n=1$ ).

$$V_b(y) = \frac{2y}{R_c} + \frac{1}{K} \left[ \frac{4 \cosh(R_c) - KR_c \exp(-R_c) - (4 - KR_c) \exp(R_c y)}{2R_c \sinh(R_c)} \right] \quad (6)$$

$$\text{avec } K = \frac{U_c}{U_0}; R_c = \frac{\rho V_o h}{m} \left( \frac{h}{U_0} \right)^{n-1}; U_0 = \frac{n}{n+1} \left( \frac{-1}{m} \frac{dp}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{n+1}{n}}$$

qui sont respectivement, lorsque  $n$  est quelconque, le rapport entre la vitesse de la paroi mobile et la vitesse au centre de l'écoulement de Poiseuille, le nombre de Reynolds d'injection lié à  $V_o$  et la vitesse au centre de l'écoulement de Poiseuille.

- Dans le cas du fluide rhéo-fluidifiant ( $n=0.5$ )

Dans ce cas l'expression de la solution de base dépend de la valeur du produit  $KR_c$  et du signe de  $\tau(y)_{xy}$  :

- Si  $KR_c = 2\sqrt{3}$

$$U_b(y) = \frac{K}{2}(y+1) \quad (7)$$

- Si  $KR_c > 2\sqrt{3}$

$$V_b(y) = \frac{1}{R_c} \left[ \sqrt{3}(y+1) + \sqrt{\frac{3}{R_c}} \left( \frac{1+C_1 \exp(2y\bar{R}_c)}{1-C_1 \exp(2y\bar{R}_c)} - \frac{1+C_1 \exp(-2\bar{R}_c)}{1-C_1 \exp(-2\bar{R}_c)} \right) \right] \quad (8)$$

$$\text{où } C_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}; a = \cosh(2\bar{R}_c) + \frac{2\sqrt{3}/R_c \sinh(2\bar{R}_c)}{R_c K - 2\sqrt{3}} \text{ et}$$

$$\bar{R}_c = \sqrt{\sqrt{3}R_c}$$

- Si  $KR_c < 2\sqrt{3}$  et  $\tau(y)_{xy} \geq 0$

$$V_b(y) = \frac{1}{R_c} \left[ \sqrt{3}(y+1) + \sqrt{\frac{3}{R_c}} \left( \frac{1-C_2 \exp(2y\bar{R}_c)}{1+C_2 \exp(2y\bar{R}_c)} - \frac{1-C_2 \exp(-2\bar{R}_c)}{1+C_2 \exp(-2\bar{R}_c)} \right) \right] \quad (9)$$

$$\text{avec } C_2 = b - \sqrt{b^2 - 1}; b = \frac{2\sqrt{3}/R_c \sinh(2\bar{R}_c)}{2\sqrt{3} - R_c K} - \cosh(2\bar{R}_c)$$

- Si  $KR_c < 2\sqrt{3}$  et  $\tau(y)_{xy} \leq 0$

$$V_b(y) = \frac{1}{R_c} \left[ \sqrt{\frac{3}{R_c}} (\tan(\bar{R}_c(C_3 - y)) - \tan(\bar{R}_c(C_3 + 1))) + \sqrt{3}(y+1) \right] \quad (10)$$

$$\text{où } C_3 = \frac{1}{\bar{R}_c} \arctan \left( \frac{2\sqrt{3} - R_c K - 2\sqrt{\sqrt{3}/R_c \tan(\bar{R}_c)}}{2\sqrt{\sqrt{3}/R_c \tan(\bar{R}_c) + (2\sqrt{3} - R_c K) \tan^2(\bar{R}_c)}} \right)^{1/2}$$

Afin d'étudier la stabilité linéaire de cet écoulement, nous superposons, à ces solutions de base, des perturbations infinitésimales de la manière suivante

$$V_x = V_b + u', \quad V_y = V_o + v', \quad P = P_b + p' \quad (11)$$

Par la suite, les solutions peuvent être cherchées en mode normaux de la façon suivante :

$$(v', p') = [\varphi(y), p] e^{i\alpha(x-ct)} \quad (12)$$

où  $c (= c_r + ic_i)$  est la vitesse de propagation,  $\alpha$  est le nombre d'onde selon la direction  $e_x$ .  $\varphi$  et  $p$  sont respectivement les amplitudes complexes de la fonction de courant  $\Phi(x, y, t)$  et  $p'$ . Ce qui conduit à établir l'équation différentielle, déterminant la stabilité de cet écoulement, suivante :

$$\left[ (-i\alpha c + i\alpha V_b + \frac{R_c}{Re} D) (D^2 - \alpha^2) - i\alpha D^2 V_b \right] \varphi = \frac{1}{Re} [nD^4 + n\alpha^4 + 2(n-2)\alpha^2 D^2] \varphi \quad (13)$$

où  $Re = \frac{\rho U_0 h}{m} \left( \frac{h}{U_0} \right)^{n-1}$  est le nombre de Reynolds lié à  $U_0$

Les conditions aux limites associées à l'équation (12) sont :

$$\varphi(\pm 1) = D^1 \varphi(\pm 1) = 0, \text{ avec } D^j = \frac{\partial^j}{\partial y^j} \quad j=1,2,3,4 \quad (14)$$

Les équations (13) et (14) sont résolues numériquement en utilisant la méthode spectrale de collocation de Chebyshev [7]. La discrétisation de ce système (Eqs. 13 et 14) aux points de collocation de Gauss-Lobatto (N) se ramène à un système algébrique aux valeurs propres  $c$  :

$$\mathbf{E}\varphi = c\mathbf{F}\varphi \quad (15)$$

Où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont des opérateurs matriciels qui dépendent de  $N, K, n, \alpha, Re$  et  $R_c$ . L'écoulement est considéré linéairement instable si  $c_i > 0$  [8]. La validation de notre code numérique a été vérifiée en comparant nos résultats avec ceux d'Orszag [9] et Fransson et Alfredsson [3], respectivement, pour un écoulement de Poiseuille plan d'un fluide Newtonien sans et avec un jet transversal. De même, nous avons procédé une autre validation de ce code à partir des résultats de Guha et Frigard [4] dans le cas de l'écoulement de Couette-Poiseuille plan en présence d'un jet transversal. De cette validation, on constate que nos résultats sont en bon accord avec ceux de ces auteurs [3,4 et 9]. Nous signalons que tous les résultats numériques présentés dans ce travail sont calculés avec 120 points de collocation.

### 3. Résultats et discussions

Nous nous intéressons dans cette étude au comportement du mode propre gouvernant la stabilité du système étudié par l'étude de l'amplitude maximale de la partie imaginaire ( $c_{imax}$ ) de la valeur propre  $c$  en fonction de  $R_c$  à  $Re=6000$  et  $\alpha=1$ .

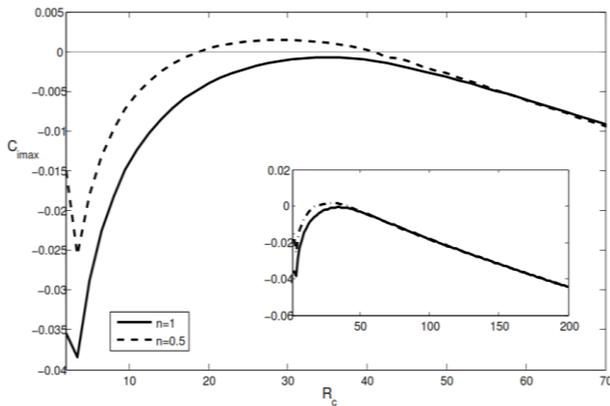


Figure 1 : Evolution du mode propre dominant en fonction de  $R_C$  pour  $n=0.5$  et  $n=1$  à  $Re=6000$ ,  $\alpha=1$  et  $K=1$ .

La figure (1) montre que, dans le cas où  $n=1$  (fluide Newtonien) et lorsque  $K=1$ , le mode propre dominant, initialement se stabilise, ensuite sa stabilité diminue et finalement s'amplifie avec l'augmentation de  $R_C$  en accord avec les résultats de Guha et Frigard [4]. Pour  $n=0.5$ , cas qui correspond à un fluide rhéo-fluidifiant, la variation de  $R_C$  préserve la même allure de  $c_{i\max}$  observée dans le cas d'un fluide Newtonien. Toutefois, le mode propre dominant initialement stable, passe par une phase de déstabilisation,  $c_i > 0$ , et regagne sa stabilité plus loin de grandes valeurs de  $R_C$ . Ainsi, on constate que l'aspect rhéo-fluidifiant déstabilise plus l'écoulement que dans le cas Newtonien. Cependant, à fort débit d'injection (à grands  $R_C$ ) le fluide rhéo-fluidifiant lorsque  $n=0.5$  se comporte comme un fluide Newtonien.

Dans la figure (2), nous présentons le comportement du même mode pour le fluide rhéo-fluidifiant ( $n = 0.5$ ) en fonction de  $R_C$  pour différentes valeurs de  $K$ . L'influence du mouvement de la paroi ( $K$ ), sur la variation du mode dominant en fonction de  $R_C$  est qualitativement semblable à celle de la figure (1). On peut constater qu'à partir de  $R_C \geq 2.5$ , le jet transversal élimine complètement l'influence du mouvement de la paroi pour des  $K > 1$  : le mode dominant préserve sa même évolution, qu'il avait à  $K=1$ . A des nombres  $R_C < 2.5$ , l'écoulement devient de plus en plus stable avec la croissance de  $K$ .

#### 4. Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié la stabilité hydrodynamique linéaire d'un écoulement de fluide rhéo-fluidifiant,  $n=0.5$ , entre deux plaques planes, poreuses, parallèles et en présence d'un écoulement transversal uniforme. Nous avons développé une approche analytique qui nous a permis de trouver la solution de base, sujette à des conditions sur le produit  $KR_C$  et sur le signe de la contrainte de cisaillement,  $\tau(y)_{xy}$ , dans le cadre des écoulements stationnaires d'un fluide en loi puissance ayant  $n=0.5$ . Cette solution a été perturbée au voisinage de l'équilibre. Le problème étudié est réduit à une équation du type d'Orr-Sommerfeld (O-S) modifiée qui est résolue numériquement par la méthode spectrale de collocation de Chebychev. En réalisant un code de calcul qui a été validé en référence à des travaux antérieurs [3,4, et 9].

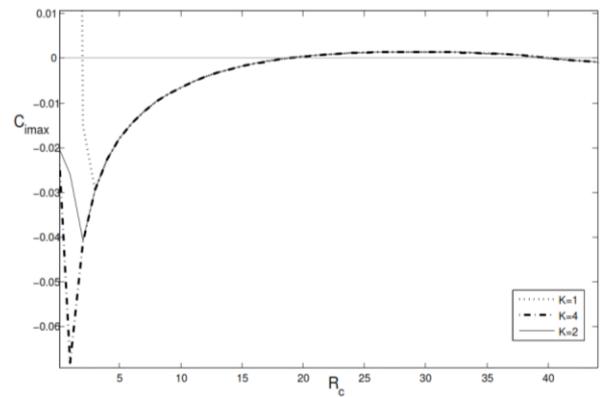


Figure 2 : Evolution du mode propre dominant du fluide rhéo-fluidifiant ( $n=0.5$ ) en fonction de  $R_C$  pour différentes valeurs de  $K$  pour  $Re=6000$  et  $\alpha=1$ .

Cette étude révèle, dans un premier temps que l'écoulement transversal a un effet à la fois stabilisant et déstabilisant selon la gamme des  $R_C$  choisis. A forts débits du jet transversal, le fluide rhéo-fluidifiant ( $n=0.5$ ), perd son caractère déstabilisant et se comporte comme un fluide Newtonien. Dans un deuxième temps, elle révèle qu'à faibles débits de ce jet ( $R_C < 2.5$ ), la stabilité de l'écoulement est renforcée par le mouvement de la paroi et qu'au-delà de ce seuil l'effet du mouvement de la paroi ne se fait plus sentir.

#### Références

- [1] F. D. Hains, *Stability of plan Couette-Poiseuille flow with uniform cross flow*. Phys. Fluids 14, pp. 1620-1623, 1971
- [2] D. Max Sheppard. *Hydrodynamic stability of the flow between parallel porous walls*. Phys. Fluids, 1972.
- [3] J. H. M. Fransson and P. Henrik Alfredsson. *On the hydrodynamics stability of channel flow with cross flow*. Physics of Fluids, 15(2), pp. 436–441.
- [4] A. Guha and I. A. Frigaard, "On the stability of plane Couette-Poiseuille flow with uniform cross-flow," J. Fluid Mech 656, pp. 417-447, 2010.
- [5] M. Lamine and A. Hifdi, *stability analysis of plane couette-poiseuille flow with porous walls under transverse magnetic field*, Journal of Thermal Engineering Vol. 2, No. 4, pp. 807-813, July, 2016.
- [6] Yu-Q. Liu, Jie P. Ke, Qin Zhu *Effects of shear-thinning/thickening behaviors on the stability of Couette-like flows with uniform crossflow*, doi: 10.1007/s10409-013-0092-4 Acta Mechanica Sinica(2013),
- [7] A. C. Weideman and S. C. Reddy, ACM Transactions on Mathematical Software. Vol. 26, 465, 2000
- [8] A. Hifdi, M. Ouazzani-Touhami, and J. Khalid-Naciri, *Channel entrance flow and its linear stability*, J. Stat. Mech.: Theor. Exp., vol. P06003 (stacks.iop.org/JSTAT/2004/P06003), 2004.
- [9] S. A. Orszag, *Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation*, J. Fluid Mech., vol. 50, no. 4, pp. 689-703, 1971.