

Étude analytique de la convection naturelle dans une cavité trapézoïdale chauffée par le bas et remplie du nanofluide (eau+Cu)

M. ZAYDAN¹, N. YADIL¹, L. EL JAMALI¹, S. LAHLOU¹ et R. SEHAQUI¹

1 Université Hassan II de Casablanca, Faculté des sciences Ain Chock, Laboratoire de Mécanique, Équipe de Modélisation en Mécanique et Énergétique, Km 8 route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc.

na.zidane@gmail.com

rsehaqui@gmail.com

Résumé

On étudie analytiquement la convection naturelle dans une cavité trapézoïdale en coordonnées cylindriques, dont la paroi horizontale inférieure est chauffée à température constante T_C et la paroi supérieure inclinée est maintenue froide à une température $T_f < T_C$.

Les équations régissant sont résolues analytiquement à l'aide de la méthode de perturbation. Les paramètres de contrôle sont le nombre de Rayleigh, de Prandtl (Pr), l'angle d'inclinaison ϕ pour un rapport de forme ($R_f=4$) et la fraction volumique de la nanoparticule. Les résultats obtenus, montrent que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la fraction volumique et le nombre de Rayleigh mais pour des faibles valeurs de ce dernier.

Mots clefs: convection naturelle, Cavité trapézoïdale, méthode de perturbation, nanofluide.

1. Introduction

L'étude de la convection naturelle dans une cavité a suscité de nombreux travaux au cours des deux dernières décennies, tant sur le plan numérique, analytique qu'expérimental. L'amélioration sans cesse croissante des moyens de calcul permet d'affiner régulièrement les résultats relatifs à la convection naturelle dans la cavité. Nous citerons l'étude analytique et numérique de la convection naturelle induite Par une production de chaleur volumétrique dans des cavités inclinées Refroidi asymétriquement par les flux thermiques par El Moutaouakil et al.[1], celle Formule compacte de quatrième ordre pour la résolution du problème de transfert de chaleur dans une cavité carrée remplie de nanofluide avec une condition de chauffage par Zaydan et al.[2] et celle de la présence de MHD par L.Th. Benos et al.[3]. Sur le plan pratique, l'étude de la cavité constitue un cas d'importance, nous citerons à titre d'exemple la distillation solaire [4], le refroidissement des modules électroniques et autres

- Les particules solides bien dispersées dans le fluide de base, et sont en état d'équilibre thermique avec celui.

appareillages électriques, les mouvements d'air de fumées et de polluants dans les locaux d'habitations ou industriels [5], etc. Des travaux concernant des cavités non rectangulaires ont été entrepris par A.I. Alsabery et al. [6] et Saleh et al.[7]. L'étude que nous présentons concerne une étude analytique de la convection naturelle dans une cavité trapézoïdale en coordonnées cylindriques, dont la paroi horizontale inférieure est chauffée à température constante T_C et la paroi supérieure inclinée est maintenue froide à une température $T_f < T_C$. L'influence des divers paramètres, tant le nombre de Rayleigh, de Prandtl (Pr), l'angle d'inclinaison ϕ pour un rapport de forme ($R_f=4$) et la fraction volumique de la nanoparticule.

2. Formulation mathématique du problème

Le modèle physique est représenté sur la figure 1. Le nanofluide (eau+Cu) est confiné dans la région annulaire ABCD comprise entre deux cylindre concentrique, de rayon R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) et limitée par un angle au sommet ϕ_m . Les conditions limites physiques imposent un flux nul sur les frontières AC et BD, et des distributions de température constante T_C sur CD et T_f sur AB ($T_f < T_C$).

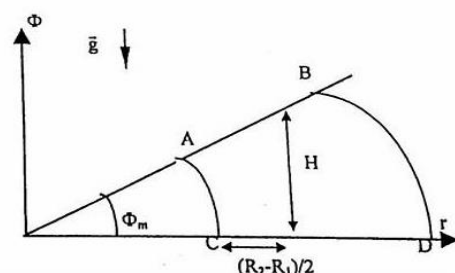


Figure 1 : Géométrie de la cavité

Nous traitons le cas de nanofluide newtonien, compris dans l'espace annulaire (R_2-R_1), en convection naturelle et qui obéit aux hypothèses simplificatrices suivantes :

- Approximation de Boussinesq
- On considérera une seule phase.
- Le mouvement Brownienne est négligé.

Le système d'équations définissant le mouvement s'écrit sous la forme adimensionnelle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{V} = -\vec{\nabla}P + Gr_{nf}T\vec{g} + \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})T = \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f P_r} \nabla^2 T \quad (2)$$

Le terme de pression peut être éliminé en prenant le rotationnel de l'équation (2), on obtient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\omega = Ra_{nf}L(T) + \nabla^2 \omega \quad (3)$$

Avec

$$L = \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial r} + \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \text{ et } \omega \text{ la vorticité.}$$

Les composantes du vecteur vitesse et la vorticité, s'expriment en fonction de la fonction de courant adimensionnelle ψ par :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \omega = -\nabla^2 \psi \quad (4)$$

Dans ce cas l'équation (1) est satisfaite, alors que les équations (2) et (3) deviennent respectivement :

$$\nabla^4 \psi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(r, \phi)} \right] + Ra_{nf}L(T) + \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla^2 T = \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{(P_r)_{nf}}{r} \left[\frac{\partial(\psi, T)}{\partial(r, \phi)} \right] \right) \quad (6)$$

Les conditions aux limites adimensionnelles sont :

$$u = v = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \text{ pour } r = 1, \quad (7)$$

$$r = R_F = \frac{R_2}{R_1} \text{ et } 0 \leq \phi \leq \phi_m$$

$$u = v = \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0, \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \text{ pour } \phi = 0, \phi = \phi_m \text{ et } 1 \leq r \leq R_F \quad (8)$$

$$T = 1 \text{ pour } \phi = 0 \text{ et } T = 0 \text{ pour } \phi = \phi_m \quad (9)$$

3. Méthode de perturbation

Le système formé des équations (6) et (7) et des conditions aux limites (8-10) pour la température T et pour la fonction du courant ψ constitue un problème régulier de perturbation. Pour cela une solution de l'état de base à faible nombre de Rayleigh, est obtenue en négligeant le terme instationnaire. En développant les fonctions ψ et T sous forme de séries des puissances entières du nombre Grashof, sous la forme :

$$\psi(r, \phi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (Ra_{nf})^n \psi_n(r, \phi) \quad (10)$$

$$T(r, \phi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (Ra_{nf})^n T_n(r, \phi) \quad (11)$$

Par substitution des équations (11) et (12) dans les équations (6) et (7) et en collectant les termes de même puissance en Ra_{nf} nous obtenons les équations linéaires suivantes :

$$\nabla^4 \psi_n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\psi_i, \nabla^2 \psi_{n-i})}{\partial(r, \phi)} \right] + L(T_{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$\nabla^2 T_n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(P_r)_{nf}}{r} \left[\frac{\partial(\psi_i, T_{n-i})}{\partial(r, \phi)} \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

À l'ordre zéro les fonctions ψ_0 et T_0 solutions des équations :

$$\Delta T_0 = 0 \quad (14)$$

$$\psi_0 = \text{constante} \quad (15)$$

$$T_0(r, 0) = 1, \quad T_0(r, \phi_m) = 0 \quad (16)$$

Sont de la forme

$$\psi_0 = 0, T_0 = 1 - \frac{\phi}{\phi_m} \quad (17)$$

À l'ordre un, ψ_1 et T_1 solutions des équations :

$$\nabla^4 \psi_1 = L(T_0) \quad (18)$$

$$\nabla^2 T_1 = \frac{(P_r)_{nf}}{r} \left[\frac{\partial T_0}{\partial r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} - \frac{\partial T_0}{\partial \phi} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right] \quad (19)$$

Sont de la forme :

$$\psi_1(r, \phi) = \left[A_1 r + A_2 r \ln(r) + \frac{A_3}{r} + A_4 r^3 + A_5 r^3 \ln(r) \right] \sin(\phi) \quad (20)$$

$$T_1(r, \phi) = \left[B_1 r + \frac{B_2}{r} + B_3 r \ln^2(r) + B_4 r \ln(r) + B_5 \frac{\ln(r)}{r} + B_6 r^3 \ln(r) + B_7 r^3 \right] \sin(\phi) \quad (21)$$

À l'ordre un, ψ_2 et T_2 solutions des équations :

$$\nabla^4 \psi_2 = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \psi_1) - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\nabla^2 \psi_1) \right) + \frac{\partial T_1}{\partial r} \cos(\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial \phi} \sin(\phi) \right] \quad (22)$$

$$\nabla^2 T_2 = \frac{(P_r)_{nf}}{r} \left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} - \frac{\partial T_1}{\partial \phi} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial T_0}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} - \frac{\partial T_0}{\partial \phi} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) \right] \quad (23)$$

Sont de la forme :

$$\psi_2(r, \phi) = \left[A_6 + \frac{A_7}{r^2} + A_8 r^2 + A_9 r^4 + A_{10} r^2 \ln^2(r) + A_{11} r^2 \ln(r) + A_{12} r^4 \ln^2(r) + A_{13} r^4 \ln(r) + A_{14} r^6 \ln^2(r) + A_{15} r^6 \ln(r) + A_{16} r^6 \right] \sin(2\phi) \quad (24)$$

$$T_2(r, \phi) = \left[B_8 r^2 + \frac{B_9}{r^2} + B_{10} r^2 \ln(r) + B_{11} r^2 \ln^2(r) + B_{12} r^2 \ln^3(r) + B_{13} \frac{\ln(r)}{r^2} + B_{14} r^4 \ln^3(r) + B_{15} r^4 \ln^2(r) + B_{16} r^4 \ln(r) + B_{17} r^4 + B_{18} r^6 \ln^2(r) + B_{19} r^6 \ln(r) + B_{20} r^6 + B_{21} \ln^2(r) + B_{22} \ln(r) + B_{23} \right] \sin(2\phi) \quad (25)$$

La solution à l'ordre trois est obtenue, des solutions à d'ordres inférieurs, de la même manière que les précédentes. Le transfert de chaleur est caractérisé le nombre de Nusselt, rapport entre les densités de flux pariétaux échangées par convection et par conduction pur, soit :

Pour les échanges locaux, le nombre de Nusselt local paroi froide et paroi chaude sont exprimé sous la forme :

$$Nu_c = -\phi_m \frac{k_{nf}}{k_f} \left(\frac{\partial T}{\partial \phi} \right)_{\phi=0} \quad \text{et} \quad (26)$$

$$Nu_f = \phi_m \frac{k_{nf}}{k_f} \left(\frac{\partial T}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_m}$$

Pour les échanges globaux, le nombre de Nusselt global a pour expression :

$$\overline{Nu}_c = -\frac{\phi_m}{\ln(RF)} \frac{k_{nf}}{k_f} \int_1^{RF} \left(\frac{\partial T}{\partial \phi} \right)_{\phi=0} dr \quad \text{et} \quad (27)$$

$$\overline{Nu}_f = \frac{\phi_m}{\ln(RF)} \frac{k_{nf}}{k_f} \int_1^{RF} \left(\frac{\partial T}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_m} dr$$

4. Résultats et discussion

Dans cette partie, on a étudié l'effet de quelques paramètres (Nombre de Rayleigh, Grashof, angle d'inclinaison, rapport de forme et la fraction volumique) sur le nombre de Nusselt.

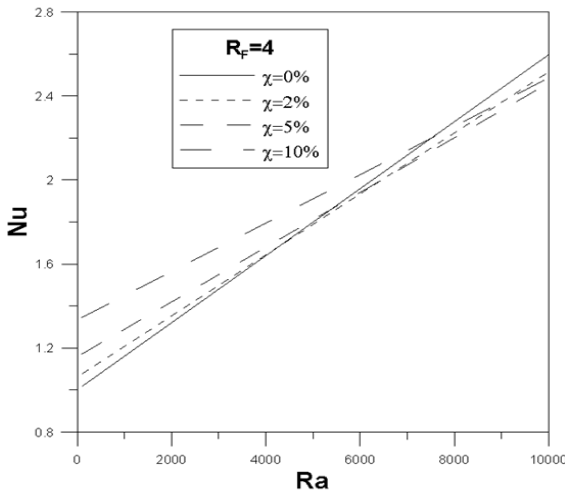


Figure 2 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de la fraction volumique pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh avec $\phi_m = 11^\circ$.

La figure 2 représente la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de la fraction volumique pour les

différents nombre de Rayleigh. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la fraction volumique et le nombre de Rayleigh mais pour des faibles valeurs de ce dernier.

Conclusion

Dans ce travail, on a présenté une étude analytique du transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité trapézoïdale en coordonnées cylindriques chauffée par le bas et remplie du nanofluide (eau+Cu), Cette étude a permis de dégager les conclusions suivantes :

- Présentation de la méthode de perturbation.
- L'effet du nanofluide sur la convection se manifeste particulièrement à un nombre de Rayleigh ≤ 4000
- L'augmentation de la fraction volumique du nanofluide favorise d'avantage le transfert de chaleur.

Références

- [1] L. El Moutaouakil, Z. Zrikem, and A. Abdelbaki, "Analytical and numerical study of natural convection induced by a volumetric heat generation in inclined cavities asymmetrically cooled by heat fluxes," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 40, pp. 2913-2928, 2016.
- [2] M. Zaydan, N. Yadir, Z. Boulahia, A. Wakif, and R. Sehaqui, "Fourth-Order Compact Formulation for the Resolution of Heat Transfer in Natural Convection of Water-Cu Nanofluid in a Square Cavity with a Sinusoidal Boundary Thermal Condition," *World Journal of Nano Science and Engineering*, vol. 6, p. 70, 2016.
- [3] L. T. Benos, S. Kakarantzas, I. Sarris, A. Grecos, and N. Vlachos, "Analytical and numerical study of MHD natural convection in a horizontal shallow cavity with heat generation," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 75, pp. 19-30, 2014.
- [4] J. Rheinländer, "Numerical calculation of heat and mass transfer in solar stills," *Solar Energy*, vol. 28, pp. 173-179, 1982.
- [5] C. Beghein, F. Haghghat, and F. Allard, "Numerical study of double-diffusive natural convection in a square cavity," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 35, pp. 833-846, 1992.
- [6] A. Alsabery, A. Chamkha, S. Hussain, H. Saleh, and I. Hashim, "Heatline visualization of natural convection in a trapezoidal cavity partly filled with nanofluid porous layer and partly with non-Newtonian fluid layer," *Advanced Powder Technology*, vol. 26, pp. 1230-1244, 2015.
- [7] H. Saleh, R. Roslan, and I. Hashim, "Natural convection heat transfer in a nanofluid-filled trapezoidal enclosure," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 54, pp. 194-201, 2011.