

Ballotement d'un liquide hétérogène dans un récipient sous excitation rotationnelle

J. EL BAHAOUI¹, H. ESSAOUINI¹, L. EL BAKKALI¹

1. Equipe M2SM -UAE/ER 28/FS
Département de physique
Faculté des Sciences de Tétouan
Jelbahaoui@yahoo.com

Résumé

Le problème des petites oscillations d'un liquide visqueux hétérogène dans un récipient se ramène au problème de ballotement de la surface libre. L'étude de ce problème est traitée en développant un modèle théorique à l'aide de l'analyse variationnelle et un modèle numérique 2D pour étudier l'influence de l'hétérogénéité du liquide en tant qu'un paramètre variable sur les modes de ballotement des réservoirs sous excitation de type rotation. Les historiques du temps de l'élévation de la surface libre du liquide homogène et hétérogène sont enregistrés et discutés.

Mots clefs : *Ballotement, Surface libre, Liquide hétérogène, Formulation variationnelle, MEF.*

1. Introduction

Le ballotement de liquides peut causer un grand nombre de problèmes d'instabilité dans les réservoirs immobiles. Les réservoirs de stockage de liquides sont largement utilisés dans notre vie, et constituent un élément important dans les systèmes de distribution d'eau, dans le réservoir de carburant du véhicule et dans les raffineries de pétrole, etc. Au fil des années, le problème de ballotement a été étudié par un certain nombre de chercheurs [1,2,3,5]...en utilisant des différentes méthodes et techniques expérimentales. En effet, dans la plupart des études réalisées, le liquide est supposé homogène. Mais certainement dans le cas d'un lac ou d'un barrage par exemple ne satisfait pas à cette restreinte hypothèse, on peut dire, dans ce cas, que le liquide est hétérogène dont la densité à l'équilibre est une fonction linéaire et dépend des caractéristiques physiques des fluides [4].

L'objectif de ce présent travail est d'étudier le problème de ballotement d'un liquide hétérogène contenant dans un réservoir immobile sous excitation sinusoïdale (rotationnelle). Il s'agit d'étudier le problème de ballotement de la surface libre du liquide en développant un modèle mathématique en se basant sur le principe variationnel pour établir les équations du mouvement et puis de résoudre numériquement ces équations de mouvement de ce problème.

2. Formulation mathématique dans le cas du liquide visqueux hétérogène

2.1 Cas du récipient immobile rempli par un liquide visqueux hétérogène

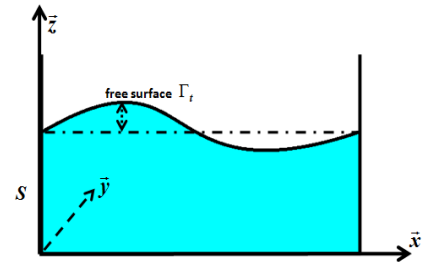


Figure (1) : récipient immobile rempli partiellement par un liquide hétérogène

Nous désignerons $\vec{u}(x, t)$ le petit déplacement d'une particule du liquide qui occupe la position \mathcal{X} à l'instant t de sa position d'équilibre. $r^*(x, t)$, $P^*(x, t)$ sont respectivement la masse volumique et la pression.

m^* représente le coefficient de viscosité du liquide à une température constante, nous considérons que la viscosité est une fonction de densité $m^* = m^*(r^*)$

Les équations de Navier-Stokes linéarisées du mouvement du liquide peuvent être écrites de la forme suivante:

$$\begin{cases} r^* \ddot{u}_i = - \frac{\partial P^*}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (2m^*(r^*) e_{ij}(\dot{\vec{u}})) - r^* g d_{i3} & (i = 1, 2, 3) \\ \text{div}(\dot{\vec{u}}) = 0 & \text{in } W \text{ (incompressibilité) } \end{cases} \quad (2.1)$$

La formulation variationnelle de ce problème est :

$$\begin{cases} \int_W \dot{\vec{u}} \cdot \ddot{\vec{u}} \, dW + \int_W 2m^*(r^*) e_{ij}(\dot{\vec{u}}) e_{ij}(\ddot{\vec{v}}) \, dW + \int_G g R_0 (u_{3|G}) \bar{v}_{3|G} \, dG \\ + \int_W \dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{u}} - r_0(x_3) \dot{\vec{u}} \cdot \vec{v}_3 \, dW = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour toute fonction \vec{v} suffisamment régulière dans l'espace

$$W = \{ \vec{v} / \text{div}(\vec{v}) = 0, \vec{v}|_S = 0 \}$$

2.2 Cas d'un récipient sous une excitation de rotation

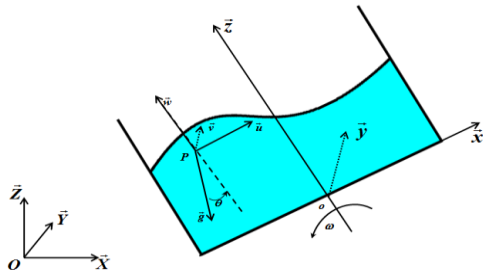


Figure (2) : récipient immobile rempli par un liquide hétérogène sous sollicitation sinusoïdale

Dans ce paragraphe, nous supposons que le récipient fait un mouvement de rotation autour de l'axe y, où θ et ω représentent l'angle de rotation, et la vitesse de rotation. A et f représentent l'amplitude et la fréquence de l'excitation respectivement. Nous supposons que le réservoir est soumis à une excitation extérieure sinusoïdale suivante:

$$\theta = A \sin(2\pi f t) \tag{2.3}$$

$$\omega = 2\pi f A \cos(2\pi f t)$$

L'équation de Navier -Stokes (2.1) devient:

$$\begin{cases} r^* \ddot{u}_i = - \frac{\rho P^*}{\rho x_j} + \frac{\rho}{\rho x_i} (2m^* (r^*) e_{ij}(\dot{u})) - r^* f_i & (i = 1, 2, 3) \\ \text{div}(\dot{u}) = 0 & \text{in } W, \end{cases} \tag{2.4}$$

Où $\vec{f} = (f_{i=1,2,3})$ représente la force d'excitation

définie par $\vec{f} = \vec{g} - \vec{a}_e - 2(\vec{\omega}' \times \vec{v}_r)$

qui peut être écrit en termes de composants:

$$\begin{cases} f_1 = -g \sin q - z \ddot{q} - x \dot{q}^2 - 2\omega \dot{q} \\ f_2 = 0 \\ f_3 = -g \cos q + x \ddot{q} + z \dot{q}^2 + 2u \dot{q} \end{cases} \tag{2.5}$$

3. Modélisation numérique

Dans ce paragraphe nous présentons notre modèle numérique pour résoudre les équations du problème développé théoriquement dans la section précédente. Les simulations numériques de ballonnement ont été effectuées en utilisant la technique dynamique des fluides computationnelle (CFD) sous Comsol. Ce modèle numérique est basé sur la méthode des éléments finis (FEM), les mouvements du liquide sont supposés en deux dimensions.

Notre modèle nous pouvons simuler la surface libre dynamique afin d'analyser l'effet des modes de

ballonnement dans le récipient considéré, on peut même analyser l'effet des fluides hétérogènes en intégrant la densité comme étant une fonction variable de temps et des paramètres géométriques du réservoir. Dans ce sens, nous avons intégré la forme non-linéaire de la fonction de densité du fluide dans les équations de Navier - Stokes. Le domaine considéré dans notre cas est un récipient rectangulaire partiellement rempli de liquide, comme il est représenté sur la Figure (1).

4. Validation du modèle 2-D

Dans cette section, nous présentons la validation de notre modèle, les résultats sont comparés avec la solution analytique et d'autres résultats de littérature [1] [5] et [6]. L'étude d'élévation de surface libre et les réponses d'amplitude du ballonnement de liquide dans le réservoir rectangulaire remplie sous excitation de type rotation sont effectuées en utilisant le code Comsol. Les dimensions du récipient sont: $L = 0.9$ m et $h = 0.6$ m .

La figure (3) montre le temps et l'historique d'élévation de la surface libre du liquide dans le récipient sous sollicitations selon les équations (2.5) Les paramètres q_0 et ω sont supposées de telle sorte que $\theta_0 = 0.8$ deg et $\omega = 5,5$ rad / s.

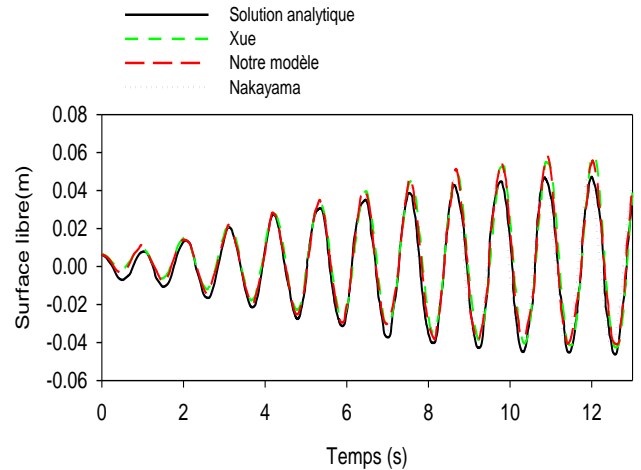


Figure (3) : Evolution de la surface libre en fonction du temps et comparaison des résultats

Les résultats que nous avons obtenus sont compatibles avec les travaux de [5] et [6]. Également, la comparaison de notre modèle avec la solution analytique [1] montre que les résultats sont en bon accord.

5. Résultats et discussions

Nous proposons dans cette section de présenter les résultats et discuter le comportement de la surface libre d'un fluide hétérogène contenu dans un réservoir rectangulaire. Nous avons effectué une étude numérique en utilisant la méthode des éléments finis pour évaluer l'effet de la densité variable sur le comportement de ballonnement du liquide. Les résultats obtenus dans le cas d'un fluide homogène et dans le cas d'un fluide

hétérogène sont présentés, une comparaison entre les deux cas est également élaborée.

5.1 Cas de la densité de Rayleigh

En regardant la littérature, la majorité des recherches sont intéressés à étudier le problème de ballonnement dans le cas des liquides homogènes, mais par contre, et à notre connaissance, l'analyse de l'effet de l'hétérogénéité est rarement traitée. Le problème d'un liquide lourd idéal hétérogène a été étudié d'abord par Rayleigh en considérant que la densité du liquide en équilibre est variable et s'écrit sous la forme suivante :

$r(z) = r_0 \exp(-\beta z)$ (3.11) Où β est le coefficient d'amortissement.

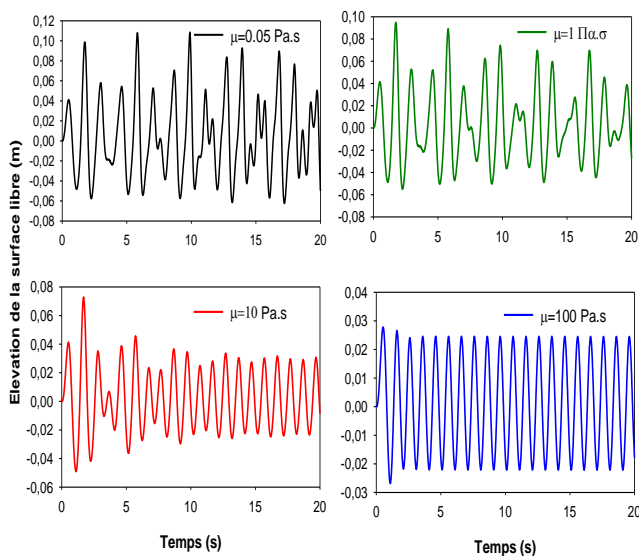


Figure (4) : Evolution de la surface libre pour différentes viscosité $\rho = 850 \text{ kg / m}^3$ $\beta = 0,5$, $\theta_0 = 4^\circ$ et $h/b = 0,3$

Le résultat que nous pouvons tirer d'après la figure (4), est que l'élévation de la surface libre est une fonction de la viscosité du liquide. Si le liquide a une viscosité élevée, la surface libre de vibration devient faible.

5.2 Effet de l'hétérogénéité du liquide sur le comportement de la surface libre

Dans cette section, nous présentons une étude comparative pour montrer l'effet de l'hétérogénéité du liquide sur le comportement des profils de la surface libre. Nous avons varié le paramètre β pour avoir son effet sur la variation de la hauteur de la surface libre. Les résultats sont présentés sur la figure (5). Cette figure montre la comparaison de l'analyse de ballonnement dans le cas d'un liquide homogène et un liquide hétérogène. En regardant la nature des courbes, le comportement du liquide testé est presque le même, ceci est valable pour une variation de temps de 3s. Après nous observons des modifications apportées au profil de la surface libre, et l'effet important de l'hétérogénéité apparaît.

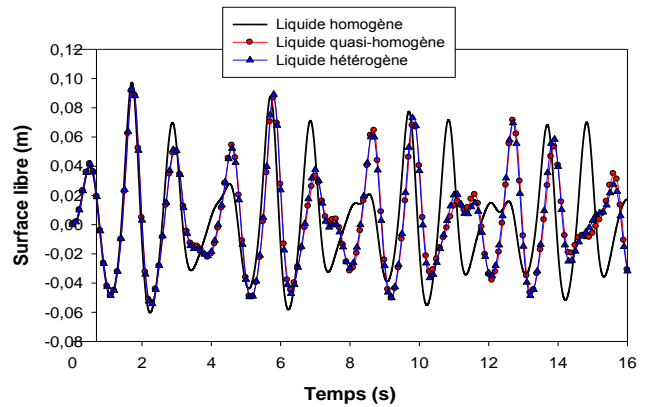


Figure (5) : Comparaison entre le ballonnement d'un liquide homogène et un liquide hétérogène

6 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une étude du phénomène de ballonnement d'un liquide hétérogène visqueux incompressible dans un réservoir immobile sous excitation sinusoïdale. Les petits mouvements amortis du système considéré dépendent du coefficient de viscosité et de densité variable de liquide. Nous avons montré que l'hétérogénéité est un paramètre important et peut conduire au phénomène de résonance et de l'instabilité des réservoirs.

Références

- [1]. Faltinsen, O.M. (1974), "A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks", J. Ship Res., 18(4), 224-241.
- [2]. M Eswaran and Ujjwal K Saha 2011 Sloshing of liquids in partially filled tanks – a review of experimental investigations. Ocean Systems Engineering, Vol. 1, No. 2 (2011) 131-155
- [3]. P. Capodanno, Etude mathématique des petites oscillations de deux liquides pesants non miscibles dans un container, Mechanics Research Communications. 23(1) (1996), 75-80.
- [4]. Hilal Essauini, Jalal El bahaoui, Labri El bakkali and Pierre Capodanno, Mathematical analysis of the small oscillations of a heavy heterogeneous viscous liquid in an open immovable container. Engineering Mathematics Letters, 2014, 2014:2.
- [5]. T. Nakayama and K. Washizu, "Nonlinear analysis of liquid motion in a container subjected to forced pitching oscillation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, no. 8, pp. 1207–1220, 1980
- [6]. Mi-An Xue, Pengzhi Lin; Numerical study of ring baffle effects on reducing violent liquid sloshing. Computers & Fluids 52 (2011) 116–129.