

Stabilité hydrodynamique de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Maxwell UCM : Etude non-modale

J.BENYZA¹, M.LAMINE, A. HIFDI

1. Université Hassan II, Faculté des Sciences Aïn Chock, Laboratoire de Mécanique Km 8 Route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc. jawadbenzya@gmail.com

Résumé

Une étude non modale de stabilité hydrodynamique d'un écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Maxwell convecté supérieur (UCM). Est effectuée. Le problème physique est réduit à un système d'équations non linéaires qui est résolu numériquement par la méthode spectrale de collocation de Chebychev. À cause de la non-normalité de l'opérateur L qui gouverne le problème de stabilité linéaire temporelle, les valeurs propres sont insuffisantes pour décrire la stabilité de ce problème durant la phase transitoire. C'est pour cette raison que nous nous intéressons ici aux effets du temps de relaxation à travers le nombre de Weissenberg sur les comportements transitoires de cette stabilité. Les résultats obtenus révèlent que le temps de relaxation a un effet déstabilisant en phase transitoire.

Mots clefs : *Instabilité ; Fluide de Maxwell convecté supérieur ; Croissance transitoire*

1. Introduction

L'analyse des valeurs propres réussit à prédire les comportements d'instabilité pour certains systèmes fluides, tels que la convection de Rayleigh-Bénard et l'écoulement de Taylor-Couette. Cependant, pour d'autres problèmes d'instabilité d'écoulements de cisaillement, cette approche ne correspond pas à des résultats expérimentaux [1,2]. Par exemple, l'analyse des valeurs propres pour les écoulements du type Couette plan et Poiseuille dans une conduite, montre qu'ils sont toujours stables aux petites perturbations quel que soit le nombre de Reynolds. Alors que la transition vers la turbulence a été observée expérimentalement lorsque le nombre de Reynolds varie entre 350 et 370 dans le cas d'un écoulement de Couette plan d'un fluide Newtonien [2]. L'écart entre l'analyse des valeurs propres et les expériences ont été reconnus par certains auteurs. Ce caractère limitatif de l'approche, par valeurs propres, conduit à l'émergence d'une nouvelle théorie dite : théorie de la stabilité non modale [3]

Dans ce travail, nous examinons la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan de fluide de Maxwell UCM en s'appuyant sur la théorie de la stabilité non modale. La croissance transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation est exploitée pour cerner l'influence du temps de relaxation sur les comportements transitoires dans la zone stable.

2. Formulation mathématique du problème physique

Dans le système de coordonnées cartésiennes (x^*, y^*) , on considère l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Maxwell convecté supérieur (UCM) incompressible, situé entre deux plans parallèles d'équations $y^*=h$ et $y^*=-h$ d'extensions infinies dans la direction \mathbf{e}_x . Les équations régissant l'écoulement de ce fluide, de vitesse caractéristique U_0 , traduites en variables réduites $(x = \frac{x^*}{h}, y = \frac{y^*}{h}, P = \frac{p^*}{\rho U_0^2}, u = \frac{u^*}{U_0}, v = \frac{v^*}{U_0}, \tau = \frac{\tau^*}{\rho U_0^2}, t = \frac{U_0 t^*}{h})$ s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

$$u(x, \pm 1, t) = v(x, \pm 1, t) = 0 \quad (3)$$

Où $\mathbf{V} = (u, v)$ le vecteur vitesse, P la pression et $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes définit dans le cas d'un fluide UCM par la loi de comportement suivante :

$$\boldsymbol{\tau} + We \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} = \frac{1}{Re} \mathbf{T} \quad (4)$$

où $Re = \frac{h U_0}{\nu}$ et $We = \frac{\lambda U_0}{h}$ sont, respectivement, le nombre de Reynolds, Weissenberg relatif au temps de relaxation λ , \mathbf{T} le tenseur de taux de déformation et $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée de Jaumann.

A l'état d'équilibre, nous nous limitons à des écoulements de base stationnaires et unidirectionnels, dont le champ de vitesse s'écrit $\mathbf{V} = U_b(x, y) \mathbf{e}_x$.

Dans ces conditions, les solutions $(U_b, v_b, p_b, \boldsymbol{\tau}^b)$ du système des équations (1-4) sont:

$$\begin{aligned} U_b(y) &= 1 - y^2, & v_b &= 0, & p_b &= -2x \\ \tau_{xx}^b &= 8We y^2, & \tau_{yy}^b &= 0, & \tau_{xy}^b &= -2y \end{aligned} \quad (5)$$

Pour l'étude de stabilité, nous superposons, à ces solutions de base, des perturbations infinitésimales de la manière suivante

$$u = U_b + u' , \quad v = v' , \quad P = P_b + p' \quad (6)$$

$$\tau_{xx} = \tau_{xx}^b + \tau'_{xx} , \quad \tau_{yy} = \tau'_{yy} , \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^b + \tau'_{xy}$$

Par la suite, les solutions peuvent être écrites sous la forme d'une superposition de modes de Fourier complexes du type :

$$[v', \tau'_{xx}, \tau'_{xy}, \tau'_{yy}](x, y, t) = [\Phi, \hat{t}_{xx}, \hat{t}_{xy}, \hat{t}_{yy}](y, t) e^{i\alpha x}$$

avec $\Phi, \hat{t}_{xx}, \hat{t}_{xy}$ et \hat{t}_{yy} des amplitudes complexes de $v', \tau'_{xx}, \tau'_{xy}$ et τ'_{yy} , α est le nombre d'onde et $i^2 = -1$. Les équations de l'évolution linéaire des perturbations peuvent alors s'écrire sous la forme d'un problème aux valeurs initiales comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_1 \Phi = f_2 \Phi + G \hat{t}_{xx} - G \hat{t}_{yy} - f_3 \hat{t}_{xy} \\ \alpha Re We \frac{\partial}{\partial t} \hat{t}_{xx} = f_4 \Phi + f_7 \hat{t}_{xx} + f_8 \hat{t}_{xy} \\ \alpha Re We \frac{\partial}{\partial t} \hat{t}_{xy} = f_5 \Phi + \frac{f_8}{2} \hat{t}_{yy} + f_7 \hat{t}_{xy} \\ \alpha Re We \frac{\partial}{\partial t} \hat{t}_{yy} = f_6 \Phi + f_7 \hat{t}_{xy} \end{cases} \quad (7)$$

- Les conditions aux limites associées au système (7) sont:

$$\Phi(\pm 1, t) = D\Phi(\pm 1, t) = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{où } f_1 &= (D^2 - \alpha^2) , \quad f_3 = (D^2 + \alpha^2) \\ f_2 &= [i\alpha D^2 U_b - i\alpha U_b f_1] \\ f_4 &= -4iWe^2(DU_b D^2 U_b + (DU_b)^2 D \\ &\quad - 2(i + (We/\alpha) DU_b) D^2) \\ f_5 &= (-D^2/\alpha) - \alpha - iWeD^2 U_b - 2\alpha We^2 (DU_b)^2 \\ f_6 &= 2iD - 2\alpha We DU_b \\ f_7 &= -Re(i - \alpha We U_b) \\ f_8 &= 2i We Re U_b \end{aligned}$$

$$G = i\alpha D \quad D^n = \frac{\partial^n}{\partial y^n}$$

3. Résolution numérique

3.1 Problème aux valeurs propres

Les équations et les conditions aux limites associées décrivent complètement l'évolution d'une perturbation arbitraire infinitésimale dans le temps et l'espace. L'approche classique pour la résolution de tels problèmes de stabilité est l'approche modale. Elle consiste à réduire un problème aux valeurs initiales en un problème aux valeurs propres.

$$Q = q e^{-ct}$$

avec $c = c_r + i c_i$

Le problème aux valeurs initiales (7) devient :

$$Aq = cBq \quad (9)$$

où A et B sont des opérateurs matriciels qui dépendent de N, α, Re et We .

Le problème aux valeurs propres, c , (Eq.9) est résolu numériquement en utilisant la méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebychev évalués en N points de collocation de Gauss-Lobatto. Pour s'assurer de la convergence de cette méthode numérique, nous avons effectué nos calculs pour 4*N points de collocation en prenant N=120.

3.2 Spectre et pseudo-spectre

La non-normalité de l'opérateur $L = B^{-1}A$, fait en sorte que son spectre "exact" ne permet pas à lui seul de rendre compte de toutes ses propriétés. Il serait donc difficile de donner un sens physique à la norme qui lui est associée. Ainsi pour suppléer au manque d'informations contenues dans le spectre, on introduit la méthode de ε -pseudo-spectre [4]. L'idée sous-jacente à la définition de cette nouvelle méthode, est qu'il s'avère intéressant d'étudier non seulement les domaines où la résolvante $R(\omega) = (\omega I - L)^{-1}$ de l'opérateur n'est pas finie, mais également là où il est en norme de taille significative. L'examen de la structure du pseudo-spectre devient nécessaire. Pour cette raison, nous nous proposons de tracer les frontières parcellaires du pseudo-spectre à côté du spectre $c_i = f(c_r)$ de l'écoulement perturbé.

3.3 Croissance transitoire

Nous nous proposons dans ce qui suit d'étudier l'amplification de l'énergie cinétique $Q(t)$ de la perturbation et de déterminer la structure de celle qui permet d'avoir le maximum d'amplification de cette énergie [5]. Cette amplification de l'énergie de la perturbation est mesurée par le rapport gain $g(t)$ entre la norme d'énergie de la perturbation à l'instant t et celle à l'instant initial.

$$g(t) = \frac{\|Q(t)\|_E^2}{\|Q(0)\|_E^2} \quad (10)$$

Déterminer la perturbation optimale revient à chercher la perturbation initiale qui va maximiser le gain, c'est-à-dire le rapport entre l'énergie finale et l'énergie initiale des perturbations. La perturbation initiale est donc recherchée de manière à maximiser $g(t)$:

$$G(t) = \max_{q(0) \neq 0} [g(t)]$$

Ce maximum $G(t)$ est appelé fonction de croissance de l'énergie.

4. Résultats et discussion

4.1 Spectre et pseudo-spectre

Comme le montrent les Figures (1et 2), pour $\alpha=1$ et $Re=10^4$, la structure de pseudo-spectre des valeurs propres pour $We = 0,001$ est qualitativement semblable à celui du fluide Newtonien alors que pour $We = 0,1$, les

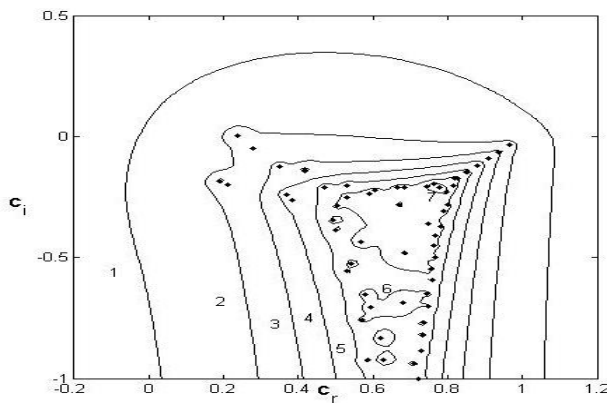


Figure 1 : Pseudospectres d'un fluide UCM (lorsque $\alpha=1$, $Re=10000$, $We=0.001$) et limites des pseudospectres de niveaux $\epsilon=10^p$ ($p=1$ à 7).

valeurs propres deviennent plus sensibles aux perturbations : la sensibilité des spectres dans la région d'intersection croît considérablement avec le nombre de Weissenberg. Ce qui nous amène à dire que cette sensibilité au voisinage de l'intersection est fonction du nombre de Weissenberg. La non-normalité de l'opérateur L de stabilité linéaire signifie que l'énergie cinétique d'une perturbation peut s'amplifier aux courts temps avant d'entamer une décroissance exponentielle. C'est pour cette raison que nous examinons dans la suite l'influence de We sur la croissance transitoire de l'énergie et les caractéristiques de la perturbation optimale.

4.2 Croissance transitoire

Dans la figure (3) nous traçons la croissance de l'énergie $G(t)$ en fonction du temps, dans le cas où l'écoulement est stable lorsque $\alpha=1$ et $Re=10^5$ [6] pour différentes valeurs de We . Comme le prouve cette figure, chaque courbe montre que l'écoulement de Poiseuille subit une croissance transitoire à $t = t_{max}$ et entame une décroissance au-delà de t_{max} . De même on constate que G_{max} croît et t_{max} décroît avec le nombre de Weissenberg. L'étendue de la zone transitoire de stabilité diminue donc avec ce dernier nombre.

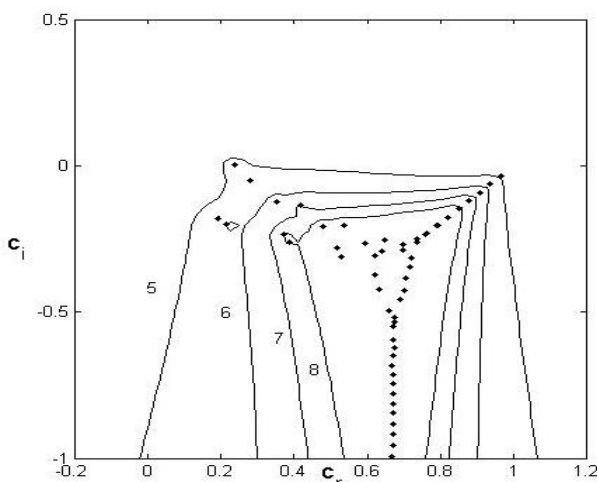


Figure 1 : Pseudospectres d'un fluide UCM (lorsque $\alpha=1$, $Re=10000$, $We=0.1$) et limites des pseudospectres de niveaux $\epsilon=10^p$ ($p=5$ à 8).

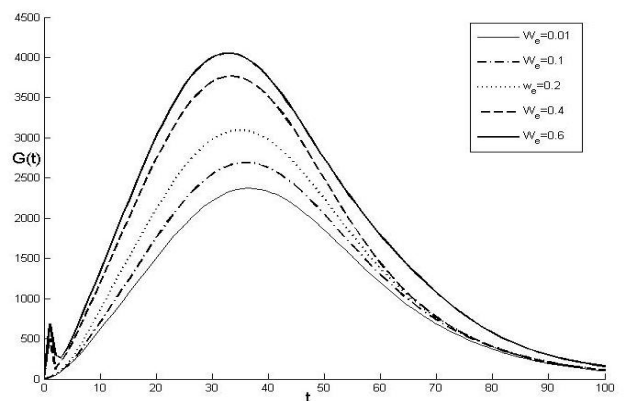


Figure 3 : Les courbes $G(t)$ en fonction du temps, lorsque $\alpha=1$ et $Re=105$ pour différentes valeurs de We

5. Conclusion

Au cours de ce travail, nous avons principalement étudié la stabilité non modale d'un écoulement de Poiseuille plan d'un fluide UCM. Nous nous sommes intéressés aux effets du temps de relaxation sur les comportements transitoires. À cause de la non-normalité de l'opérateur L qui gouverne le problème de stabilité, les valeurs propres sont insuffisantes pour décrire la stabilité de ce problème aux temps courts. Pour cette raison, l'élaboration de la méthode de ϵ -pseudo-spectre est très utile dans ce cas. Afin d'étudier l'étendue de la zone transitoire de stabilité, nous procédons à la détermination de l'amplification maximale des perturbations optimales par le calcul la norme d'énergie. Les résultats montrent que les instabilités de l'écoulement étudié sont fortement liées au nombre We . L'examen du comportement global du maximum du gain $G(t)$, l'augmentation de We suscite au sein de l'écoulement de Poiseuille une grande réponse optimale aux conditions initiales. Le temps de relaxation d'un fluide UCM en écoulement de Poiseuille a une influence sur les comportements transitoires de telle sorte que pour les We grands, un effet indésirable de déstabilisation en phase transitoire est observé.

Références

- [1] Nouar, C., Kabouya, N., Dusek, J. & Mamou, M., 2007 *Modal and non-modal linear stability of the plane Bingham-Poiseuille flow*. J. Fluid Mech. 577, 211--239.
- [2] Tillmark, N. & Alfredsson, P. H. *Experiments on transition in plane Couette flow*. J. Fluid Mech. (1992) 235, 89--102.
- [3] Schmid, P. J. 2007 *Non-modal stability theory*. Annu. Rev. Fluid Mech. 39, 129--162.
- [4] Trefethen, L. N. & Embree, M. 2005 *Spectra and Pseudospectra: the Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*. Princeton University Press.
- [5] Schmid, P. J. & Henningson, D. S. 1994 *Optimal energy growth in Hagen-Poiseuille flow*. J. Fluid Mech. 277, 197--225.
- [6] RAFIKI, A ; HIFDI, A & OUZZANI, T, O, *Stabilité hydrodynamique linéaire des écoulements plans de Poiseuille de fluides viscoélastiques en présence d'un champ magnétique transversal*, CFM2013, 21^{ème} Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, Français, 2013-12-20.