

# Dynamique non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes soumises à des chargements quelconques par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN)

**Oussama Bourihane<sup>1</sup>, Mohammad Jamal<sup>1</sup>, Bouazza Braikat<sup>1</sup>, Foudil Mohri<sup>2</sup>, Noureddine Damil<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux (LIMAT), Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca, BP 7955, Sidi Othman, Casablanca, Maroc.

o.bourihane@gmail.com

<sup>2</sup>Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3), Université de Lorraine.CNRS UMR 7239, Ile du Saulcy, 57 057 Metz, France.

## Résumé

Ce travail vise la simulation de la réponse dynamique non linéaire des poutres à parois minces et à sections constantes ouvertes sous chargements dynamiques quelconques. La formulation théorique du problème est basée sur un modèle tridimensionnel complet de poutres tenant compte des grands déplacements, des grandes torsions et du couplage flexion-torsion. Les équations d'équilibre sont établies sans aucune approximation sur l'amplitude de l'angle de torsion. La résolution numérique des équations d'équilibre est effectuée sans correction moyennant un algorithme implicite d'ordre élevé développé en suivant quatre étapes: 1- Une discrétisation spatiale et temporelle respectivement par la méthode des éléments finis et le schéma implicite de Newmark. 2- Un changement de variable. 3- Une transformation homotopique. 4- Les techniques de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). La performance de l'algorithme est testée sur un exemple de la dynamique non linéaire d'une poutre de section en I mono-symétrique. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux calculés par le code industriel Abaqus.

**Mots clefs:** *Poutre, Parois minces, Sections ouvertes, Dynamique, Non linéaire, Schéma de Newmark, MAN*

## 1. Introduction

Grâce à leur haute résistance et faible poids, les poutres à parois minces et à sections ouvertes sont largement utilisées dans les domaines de l'industrie, de l'aérospatial, de la construction navale, du génie civil etc. L'analyse du comportement dynamique de ce type de structures soumises à des chargements instationnaires extérieurs est souvent nécessaire en ingénierie pratique. A cause de leurs comportements caractérisés par les grands déplacements et les grandes torsions, la réponse dynamique de ce genre de poutres devient beaucoup plus compliquée avec la présence à la fois de plusieurs phénomènes complexes tels que le gauchissement et le couplage flexion-torsion.

Plusieurs formulations aussi bien co-rotationnelle que Lagrangienne ont été proposés dans la littérature au cours de ces dernières années. Un modèle tridimensionnel de poutre traitant le flambage de ce type de structure par la méthode asymptotique numérique (MAN) [1] a été proposé dans [2,3]. Ce modèle prend en considération les grandes torsions, le couplage flexion-torsion et les excentricités des chargements.

En se basant sur la partie théorique de ce modèle, on se propose d'étudier la dynamique non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes par un algorithme implicite d'ordre élevé. Les équations dynamiques sont établies sans aucune approximation sur l'angle de torsion tenant en compte du couplage flexion-torsion. La partie numérique est traitée par un algorithme [4] permettant de résoudre les équations dynamiques non linéaires en couplant la méthode de développement en séries de Taylor et une procédure de continuation avec le schéma implicite de Newmark.

Afin d'évaluer la performance et l'efficacité de l'algorithme proposé un exemple de la dynamique non linéaire d'une poutre de section IPE300 mono-symétrique sous l'excitation d'une force dynamique  $Fz$ . Les résultats de l'algorithme implicite d'ordre élevé sont comparés avec ceux calculés par le logiciel industriel ABAQUS.

## 2. Modèle théorique

### 2.1 Cinématique

Considérons une poutre à paroi mince et à section ouverte de longueur  $L$ , de section droite  $A(x)$  qui occupe un volume  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . En se plaçant dans le cadre des grands déplacements, grande torsion et petites déformations. Les déplacements 3D d'un point  $M$  de la poutre mince à section ouverte s'expriment par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} u_M &= u - y(v' + v'_c + w's) - z(w' + w'_c - v's) - \omega\theta'_x \\ v_M &= v - (y - y_c)s + (z - z_c)c \\ w_M &= w + (y - y_c)s + (z - z_c)c \end{aligned} \quad (1)$$

où  $u$  est le déplacement axial du centre d'inertie  $G$ ,  $v$  et  $w$  sont les déplacements du centre de torsion  $C$  dans les

directions  $y$  et  $z$  respectivement,  $\theta_x$  est l'angle de torsion,  $y_c$  et  $z_c$  sont les coordonnées du centre de torsion  $C$  et  $\omega$  est la coordonnée sectorielle. Les relations (1) sont couplées et fortement non linéaires. Aucune simplification n'est faite ici sur le cosinus et le sinus de l'angle de torsion, avec  $s = \sin\theta_x$  etc  $= \cos\theta_x - 1$ .

## 2.2 Équations du mouvement

Les équations du mouvement sont obtenues par application du théorème des puissances virtuelles :

$$(\delta T + \delta U - \delta W_{ext}) = 0 \quad (2)$$

où  $\delta T$  est la variation du travail des forces d'inertie,  $\delta U$  est la variation de l'énergie interne et  $\delta W_{ext}$  est la variation du travail des forces extérieures. La variation du travail des forces d'inertie s'écrit :

$$\delta T = \int_{\Omega} \rho (\ddot{u}_M \delta u_M + \ddot{v}_M \delta v_M + \ddot{w}_M \delta w_M) d\Omega \quad (3)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau et  $\ddot{u}_M, \ddot{v}_M$  et  $\ddot{w}_M$  sont les composantes du vecteur accélération du point  $M$ . En tenant compte de la relation (1) en intégrant sur la section transversale  $A$ , la variation du travail des forces d'inertie s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta T = \int_0^L \rho & (A \ddot{u} \delta u + A(v + z_c \ddot{\theta} + y_c \dot{\theta}^2) \delta v + \\ & A(w - y_c \ddot{\theta} + z_c \dot{\theta}^2) \delta w + (A(z_c \ddot{v} - y_c \ddot{w}) + I_0 \ddot{\theta}) \delta \theta_x + \\ & I_z \dot{v}' \delta v' + I_y \dot{w}' \delta w' + I_y \ddot{\theta}_x \delta \theta_x) dx + \delta T_{nl} \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\delta T_{nl}$  est la variation de la partie non linéaire couplée du travail des forces d'inertie. La variation de l'énergie interne  $\delta U$  est donnée par :

$$\delta U = \int_0^L (N \delta \varepsilon - M_y \delta k_y - M_z \delta k_z + M_{sv} \delta \theta_x' + B_{\omega} \delta \theta_x'' + \frac{1}{2} M_R \delta (\theta_x')^2) dx \quad (5)$$

où  $N$  est l'effort normal,  $M_y, M_z, M_{sv}$  et  $B_{\omega}$  sont respectivement les moments de flexion par rapport aux axes principaux  $y$  et  $z$ , le moment de torsion de St-Venant et le bi-moment. Le dernier terme  $M_R$  est le moment de Wagner lié au gauchissement non-linéaire. La variation du travail des forces extérieures est exprimée par :

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = \lambda(t) \int_0^{L_f} \int_A & (F_{xe} \delta u_M + F_{ye} \delta v_M + \\ & F_{ze} \delta w_M) ds dx + \lambda \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^n (f_{xj} \delta u_{Mj} + F_{yj} \delta v_{Mj} + \\ & F_{zj} \delta w_{Mj})_{sfi} \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\langle f_{xi}, f_{yi}, f_{zi} \rangle$  est le vecteur des forces concentrées appliqué à un point  $M(x_i, y_i, z_i)$  de la section  $A(x_i)$ ,  $\langle F_{xe}, F_{ye}, F_{ze} \rangle$  est le vecteur force distribué et imposé sur une partie  $L_f$  de la poutre et  $\lambda(t)$  est un paramètre de chargement connu.

### 2.1. Discrétisation par éléments finis

La discrétisation par éléments finis de la poutre est effectuée avec un élément fini à deux nœuds et à sept degrés de liberté par nœud. Des fonctions de forme linéaires sont choisies pour le déplacement axial et des fonctions cubiques d'Hermite sont adoptées pour les autres composantes  $v, w$  et  $\theta_x$ . Leurs expressions sont données dans [4]. On note les sept degrés de liberté pour chaque nœud  $\langle r \rangle_i$  par :  $\langle u, v, w, \theta_x, v', w', \theta_x' \rangle_i$  le problème dynamique non linéaire (2) peut être écrit, après discrétisation par éléments finis, sous la forme suivante :

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C(\theta)]\{\dot{r}\} + [K(\theta, \alpha)]\{r\} = \{F\} \quad (7)$$

où  $[M]$  est la matrice masse,  $[C(\theta)]$  est une matrice gyroscopique et  $[K(\theta, \alpha)]$  est la matrice de rigidité non linéaire incluant les termes géométriques, les contraintes initiales et les excentricités des forces et  $\{F\}$  représente les forces extérieures.

### 3. Stratégie de résolution

La résolution du problème non linéaire couplé (7) sera effectuée à l'aide d'un algorithme implicite d'ordre élevé basé sur les techniques de la Méthode Asymptotique Numérique. Cet algorithme est appliqué en suivant quatre étapes. On écrit le problème dynamique à l'instant  $t = (n + 1) \Delta t$  en utilisant le schéma implicite de Newmark. Le vecteur vitesse  $\{\dot{r}\}$  et le vecteur accélération  $\{\ddot{r}\}$  sont écrits sous la forme :

$$\begin{aligned} \{\dot{r}^{n+1}\} &= a_0 \{r^{n+1}\} - a_2 \{\dot{r}^n\} - a_1 \{\ddot{r}^n\} - a_0 \{r^n\} \\ \{\ddot{r}^{n+1}\} &= b_0 \{\dot{r}^n\} + b_1 \{\ddot{r}^n\} + b_2 \{\dot{r}^{n+1}\} \end{aligned} \quad (8)$$

où les coefficients  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$  et  $b_2$  sont les paramètres de Newmark. On remplace la vitesse et l'accélération par leurs expressions dans le problème (7) et on introduit un changement de variable  $\{r^{n+1}\} = \{r^n\} + \{\Delta r\}$ , le problème non linéaire vérifié par cet incrément  $\{\Delta r\}$  peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$[K_T]\{\Delta r\} + \{F_{nl}(\Delta r, \Delta r)\} = \{SM\} \quad (9)$$

où  $[K_T]$  est la matrice tangente incluant les termes de rigidité, de masse, les excentricités de chargement et les coefficients de Newmark,  $\{F_{nl}(\Delta r, \Delta r)\}$  est une forme quadratique et  $\{SM\}$  est un second membre qui dépend des solutions aux instants précédentes. Pour éviter l'inversion de la matrice tangente à chaque pas de temps, on introduit un pré-conditionneur  $[K^*]$  identifiable à  $[K_T]$  et un paramètre artificiel  $a$  sans dimension physique. L'introduction de ces paramètres se fait comme suit: pour  $a = 0$  on a un problème de solution nulle et pour  $a = 1$  on retrouve le problème (9).

$$[K^*]\{\Delta r\} + a([K] - [K^*])\{\Delta r\} + a\{F_{nl}\} = a\{SM\} \quad (10)$$

Pour résoudre le problème non linéaire (10), on développe l'inconnue du problème  $\{\Delta r\}$  sous formes d'une série de Taylor tronquée à un ordre  $N$  par rapport au paramètre introduit  $a$ .

$$\{\Delta r\} = \sum_{k=1}^N a^k \{\Delta r\}_k \quad (11)$$

En substituant les développements (11) dans le problème (10) et en identifiant terme à terme selon les puissances de  $a$ , on obtient une séquence de problèmes linéaires à chaque ordre comme suit :

$$[K^*]\{\Delta r\}_p = \{SM\}; \quad p = 1 \quad (12)$$

$$[K^*]\{\Delta r\}_p = ([K^*] - [K_T])\{\Delta r\}_{p-1} - \{F\}_{p-1}^{\text{nl}}; \quad p \geq 2 \quad (13)$$

Le problème non linéaire (10) est ainsi transformé en une succession de problèmes linéaires ayant le pré-conditionneur  $[K^*]$  comme matrice tangente. Le domaine de validité de la représentation en série  $[0, a_{max}]$ , peut être estimé par un critère qui s'exprime en fonction de l'ordre de troncature, d'une tolérance  $\varepsilon$  donnée et des seconds membres des équations linéaires vérifiées par les termes de la série (Eq. 11) donné par la relation suivante :

$$a_{max} = \left( \frac{\varepsilon}{\| \{ F_{N+1}^n \} \|} \right)^{\frac{1}{N+1}} \quad (13)$$

Le problème (10) n'est équivalent au problème initial (9) que si le paramètre introduit soit égal à 1 ( $a = 1$ ). Ce qui exige de vérifier que le rayon de convergence des séries  $a_{max}$  doit être supérieur ou égal à 1. Si cette condition est vérifiée, on prend la solution à l'instant considéré et on continue, sinon on change le pré-conditionneur.

#### 4. Dynamique non linéaire d'une poutre de section IPE 300 mono-symétrique

On considère une poutre mono-symétrique de section IPE300, de longueur  $L=6m$ , de module d'Young  $E=210$  GPa, de coefficient de Poisson  $\nu=0.3$  et de masse volumique  $\rho=7850$  kg/m<sup>3</sup>. La poutre est encastree-libre et soumise à une force  $F_z=-5\lambda$  à l'extrémité libre au point A proportionnels à un paramètre donné  $\lambda(t)$  (voir figure 2). La sollicitation, les conditions aux limites et les caractéristiques géométriques de la poutre sont données sur la figure (1).

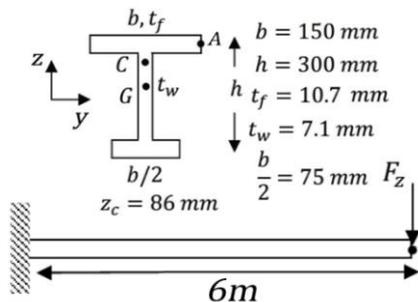


Figure 1 : Caractéristiques géométriques et sollicitation

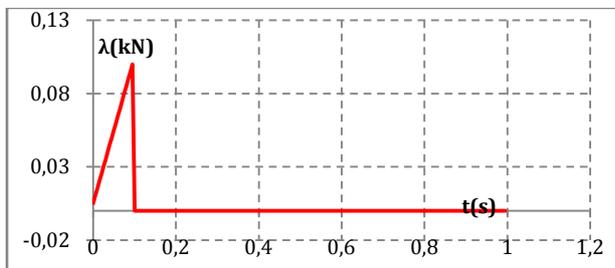


Figure 2 : Paramètre de chargement en fonction du temps

La poutre est discrétisée en 40 éléments finis de poutre. L'analyse dynamique est effectuée dans l'intervalle  $[0,1s]$  avec un pas de temps  $\Delta t=0.005s$ . On adopte pour l'algorithme proposé les paramètres suivants : un ordre de troncature  $N=13$  et une tolérance  $\varepsilon=10^{-6}$ . Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats de la simulation linéaire et avec ceux de la simulation sous Abaqus en adoptant un maillage de 2160 éléments Solid C3D20 avec le même pas de temps.

Sur les figures 2, 3, et 4 on représente l'évolution en fonction du temps des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ . Premièrement, on remarque qu'il y a un bon accord entre les résultats de l'approche proposée et ceux d'Abaqus. Pour le cas linéaire, il y a de grandes différences par

rapport aux autres modélisations ce qui confirme l'aspect non linéaire du comportement dynamique de ces structures.

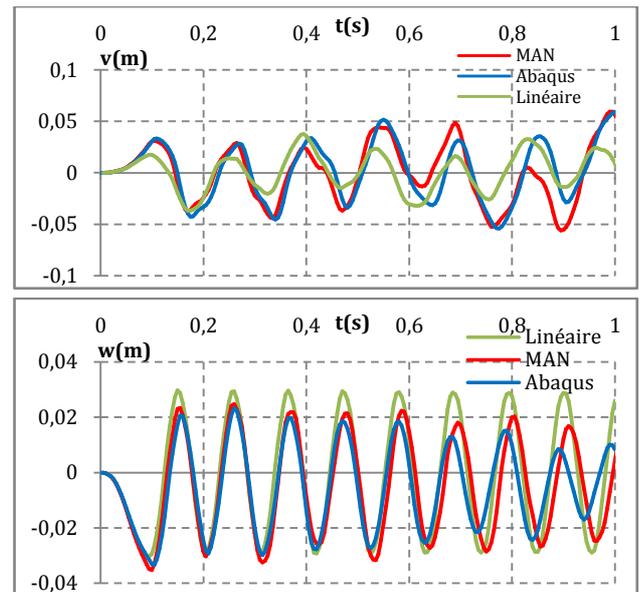


Figure 3 : Comportement non linéaire d'une poutre de section IPE300 mono-symétrique  
(a) (Evolution de  $v$  en fonction du temps) (b) (Evolution de  $w$  en fonction du temps)

#### 5. Conclusion

Dans ce travail, on analyse la dynamique non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes sous chargement dynamique. La résolution numérique des équations dynamiques non linéaires est faite en adoptant un algorithme implicite d'ordre élevé en associant le schéma implicite de Newmark avec la technique des développements en séries de Taylor. L'efficacité du modèle est testée par des comparaisons numériques avec le code industriel « Abaqus ».

#### 6. Références

- [1] N. Damil, M. Potier-Ferry, *A New method to compute perturbed bifurcations: Application to the buckling of imperfect elastic structures*, International Journal of Engineering Science 28 N°9 (1990) 943-957.
- [2] A. Ed-dinari, H. Mottaoui, B. Braikat, M. Jamal, F. Mohri, N. Damil, *Large torsion analysis of thin-walled open sections beams by the Asymptotic Numerical Method*, Engineering Structures 81 (2014) 240-255.
- [3] O. Bourihane, A. Ed-dinari, B. Braikat, M. Jamal, F. Mohri, N. Damil, *Stability analysis of thin-walled beams with open section subject to arbitrary loads*, Thin-walled Structures 105 (2016) 156-171.
- [4] M. Jamal, B. Braikat, S. Boutmir, N. Damil, M. Potier-Ferry, *A high order implicit algorithm for solving instationary nonlinear problems*, Computational Mechanics 28 (2002) 375-380.
- [5] O. Bourihane, *Flambage et dynamique des poutres à parois minces et à sections ouvertes par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN)*, Thèse de Doctorat, Université Hassan II de Casablanca, 2016.