

Étude d'une bande viscoélastique par la méthode Meshless MLPG

A. Moussaoui¹, T. Bouziane², J. Eddaoudy³

1, 2, 3 Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Moulay Ismail de Meknès, Maroc.

Laboratoire : Atomique, Mécanique, Photonique et Energétique, Equipe : Mécanique et Système Energétique.

E-mail: moussaoui.physique@gmail.com

Résumé :

Un matériau élastique se déforme instantanément lorsqu'il est soumis à une contrainte et retourne à son état d'origine lorsque celle-ci est retirée. Pour un matériau viscoélastique, la relation entre la contrainte et la déformation dépend du temps. Ce travail est consacré à l'étude d'une bande viscoélastique encastrée sur le bord, celui qui lui est parallèle soumis à des forces constantes au nœud 11. Les deux autres bords sont libres par la méthode Meshless MLPG. L'étude a concerné l'effet de paramètre de dimensionnement du support domaine α_s , du nombre de nœuds n_t sur la convergence de la méthode MLPG. Enfin nous effectuerons la comparaison entre la solution analytique et les résultats obtenus par la méthode MLPG.

Mots clefs: *Méthode Meshless MLPG, formulation faible, support domaine, algorithme de Stehfest, bande viscoélastique.*

1. Introduction

La viscoélasticité linéaire caractérise le comportement élastique et dissipatif d'un matériau en petites déformations. Pour certains matériaux, la réponse à une déformation ou à une contrainte constante varie au cours du temps. Ces observations se font plus particulièrement dans les cas des essais de fluage et de relaxation [1]. En effet, différents matériaux entraînent un comportement de fluage et de relaxation impliquant le phénomène de viscoélasticité. Un problème viscoélastique peut être résolu, soit dans le domaine temporel, directement, soit dans le domaine de la transformation de Laplace (TL). Selon le principe de correspondance [2], la solution viscoélastique peut être obtenue directement à partir de la solution du problème élastique correspondant au paramètre \mathbf{P} de la transformée de Laplace. On remplace le paramètre temps t indépendant du matériau élastique par la transformée de Laplace des paramètres \mathbf{P} du matériau viscoélastique. La solution finale dépend du temps, est obtenue par la solution de la transformée de Laplace inverse [3]. La formulation de la frontière du domaine présente quelques difficultés de calcul dans l'application numérique. D'où la nécessité des méthodes

Meshless. Dans cet article, nous présentons une méthode Meshless locale de Petrov-Galerkin MLPG pour analyser le cas statiques du solide viscoélastique linéaire.

2. Équations de base

On considère un problème dynamique dans un milieu homogène et un solide viscoélastique linéaire dans un domaine Ω , limité par la frontière Γ [4].

Les équations de base s'écrivent sous cette

$$\text{forme : } \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + b_i(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$u_i = u_i^0 \text{ sur } \Gamma_u \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^0 \text{ sur } \Gamma_t \quad (3)$$

La Loi de comportement viscoélastique linéaire définie par [4] :

$$\begin{cases} s_{ij}(\mathbf{x}, t) = 2 \int_0^t \mu(t - \tau) \frac{de_{ij}}{d\tau} d\tau \\ \sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) = 3 \int_0^t K(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kk}}{d\tau} d\tau \end{cases} \quad (4)$$

Les contraintes s_{ij} et les déformations e_{ij} du tenseur

$$\text{déviateur sont données par : } \begin{cases} s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \end{cases} \quad (5)$$

Les fonctions de relaxation $\mu(\mathbf{x}, t)$ et $K(\mathbf{x}, t)$ dans l'équation (4) dépendent des coordonnées spatiales, alors pour les solides homogènes, elles sont uniquement des fonctions du temps ($\mu(t)$ et $K(t)$).

En général, le principe de correspondance de la viscoélasticité linéaire isotrope n'est pas vérifié pour un matériau viscoélastique linéaire non isotrope. Pour remédier à ce problème, nous considérons un solide viscoélastique linéaire isotrope dans lequel les fonctions de relaxation ont la forme séparable suivante [5].

$$\begin{cases} \mu(t - \tau) = \mu_0 \mu_1(\mathbf{x}) f(t) \\ K(t - \tau) = k_0 k_1(\mathbf{x}) g(t) \end{cases} \quad (6)$$

D'où μ_0 et k_0 sont les constantes de matériau, μ_1 , k_1 , $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions sans dimension.

La Loi de comportement de l'équation (4) est réduite sous cette forme:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(x, t) = 2 \mu_0 \mu_1(x) \int_0^t f(t-\tau) \frac{de_{ij}}{d\tau} d\tau \\ \sigma_{kk}(x, t) = 3k_0 k_1(x) \int_0^t g(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kk}}{d\tau} d\tau \end{cases} \quad (7)$$

Ce problème n'est résolu analytiquement que dans quelques cas particuliers. Il est donc nécessaire de recourir à des approches numériques. Dans cet article, on présentera l'algorithme de Stehfest's [3]. La transformée de Laplace des équations (1 - 3 et 7) sont données par :

$$\bar{\sigma}_{ij,j}(x, p) - \rho p^2 \bar{u}_i(x, p) = -\bar{F}_i(x, p) \quad (8)$$

$$D^i \bar{F}_i(x, p) = \bar{b}_i(x, p) + p u_i(x, 0) + \dot{u}_i(x, 0) \quad (9)$$

$$\bar{u}_i(x, p) = \bar{u}_i^0(x, p) \quad \text{sur} \quad \Gamma_u \quad (10)$$

$$\bar{t}_i(x, p) = \bar{t}_i^0(x, p) \quad \text{sur} \quad \Gamma_t \quad (11)$$

$$\bar{s}_{ij}(x, p) = 2 \mu_0 \mu_1(x) p \bar{f}(p) \bar{e}_{ij}(x, p) \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}_{kk}(x, p) = 3k_0 k_1(x) p \bar{g}(p) \bar{\varepsilon}_{kk}(x, p) \quad (13)$$

La forme faible [8] sur un domaine local de quadrature Ω_Q (pour un point de nœud i), basée sur la méthode résiduelle locale pondérée de l'équation (8), s'écrit sous cette forme :

$$\int_{\Omega_Q} (\bar{\sigma}_{ij,j}(x, p) - \rho p^2 \bar{u}_i(x, p) + \bar{F}_i(x, p)) \nu_i d\Omega = 0 \quad (14)$$

D'où Ω_Q est le domaine local de quadrature pour un nœud i (voir figure 4.1), ν_i est la fonction poids ou

fonction test tel que $\nu_i \in C^K(\Omega)$ [6].

En utilisant le théorème de la divergence [9] dans l'équation (14), on obtient :

$$\int_{\Gamma_Q} \bar{\sigma}_{ij}(x, p) n_j \nu_i d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \bar{\sigma}_{ij}(x, p) \nu_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega_Q} [-\rho p^2 \bar{u}_i(x, p) + \bar{F}_i] \nu_i d\Omega = 0 \quad (15)$$

Le bord du domaine de quadrature est réparti en trois parties, par conséquent, l'équation (15) s'écrit sous cette forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_Q} \bar{\sigma}_{ij}(x, p) n_j \nu_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qa}} \bar{\sigma}_{ij}(x, p) n_j \nu_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\sigma}_{ij}(x, p) n_j \nu_i d\Gamma - \\ \int_{\Omega_Q} \bar{\sigma}_{ij}(x, p) \nu_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega_Q} [-\rho p^2 \bar{u}_i(x, p) + \bar{F}_i] \nu_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

L'approximation des moindres carrés mobiles (MLS) [4] est utilisée pour le rapprochement des grandeurs physiques. La transformée de Laplace de déplacement s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{u}^h(x, p) = \sum_{I=1}^{n_0} \phi_I(x) \bar{u}_I(p) \quad (17)$$

Les relations de déformation et les contraintes sont données par : $\bar{\sigma} = \mathbf{C} \bar{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}_I$ (18)

D'où \mathbf{C} est la matrice symétrique du matériau viscoélastique linéaire.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \bar{E}/(1-\bar{\nu}^2) & \bar{\nu}\bar{E}/(1-\bar{\nu}^2) & 0 \\ \bar{\nu}\bar{E}/(1-\bar{\nu}^2) & \bar{E}/(1-\bar{\nu}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{E}/2(1+\bar{\nu}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_I = \begin{pmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{pmatrix},$$

$$\bar{E} = 2\bar{\mu}(1+\bar{\nu}) \quad \text{et} \quad \bar{\nu} = \frac{3\bar{k}-2\bar{\mu}}{6+2\bar{\mu}}, \quad \text{Avec} \quad \bar{\nu}(t) \quad \text{et}$$

$\bar{E}(t)$ sont des fonctions du temps.

La relation entre la contrainte et la traction sur la frontière est donnée sous la forme :

$$\bar{\sigma}_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad (19)$$

En substituant l'équation (19) dans l'équation (16), on obtient une forme matricielle :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}} \mathbf{V}_I d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qa}} \bar{\mathbf{t}} \mathbf{V}_I d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \bar{\mathbf{V}}_I^T \bar{\sigma} d\Omega \\ - p^2 \int_{\Omega_Q} \rho \bar{\mathbf{u}} \mathbf{V}_I d\Omega = - \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^0 \mathbf{V}_I d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \mathbf{V}_I \bar{\mathbf{F}} d\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_I = \begin{pmatrix} \nu_{I,x} & 0 \\ 0 & \nu_{I,y} \\ \nu_{I,y} & \nu_{I,x} \end{pmatrix} \quad \text{est une matrice qui contient les}$$

dérivées des fonctions poids et $\mathbf{V}_I = \begin{pmatrix} \nu_I & 0 \\ 0 & \nu_I \end{pmatrix}$ est la

matrice de fonction poids.

La transformée de Laplace de la traction \mathbf{t} en un point x est définie par : $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{L}_n \mathbf{C} \mathbf{B}_I \bar{\mathbf{u}}_I$ (21)

En substituant les équations (17- 18 et 21) dans l'équation (20), on obtient un système discret d'équations linéaires pour le $I^{\text{ème}}$ nœud et s'écrit sous cette forme.

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^{n_1} \left[\int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{L}_n \mathbf{C} \mathbf{B}_I \mathbf{V}_I d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qa}} \mathbf{L}_n \mathbf{C} \mathbf{B}_I \mathbf{V}_I d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \bar{\mathbf{V}}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_I d\Omega \right. \\ \left. - p^2 \int_{\Omega_Q} \rho \Phi_I \mathbf{V}_I d\Omega \right] \bar{\mathbf{u}}_I = - \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^0 \mathbf{V}_I d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \mathbf{V}_I \bar{\mathbf{F}} d\Omega \end{aligned} \quad (22)$$

L'équation (22) s'écrit sous forme matricielle :

$$\sum_{I=1}^{n_1} \mathbf{K}_I \bar{\mathbf{u}}_I = \mathbf{f}_I \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_I = \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{L}_n \mathbf{C} \mathbf{B}_I \mathbf{V}_I d\Gamma + \int_{\Gamma_{Qa}} \mathbf{L}_n \mathbf{C} \mathbf{B}_I \mathbf{V}_I d\Gamma \\ \text{D'où :} \quad + \int_{\Omega_Q} \bar{\mathbf{V}}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_I d\Omega - p^2 \int_{\Omega_Q} \rho \Phi_I \mathbf{V}_I d\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{Et} \quad \mathbf{f}_I = - \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{\mathbf{t}}^0 \mathbf{V}_I d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \mathbf{V}_I \bar{\mathbf{F}} d\Omega \quad (25)$$

$$\text{Le système final est :} \quad \mathbf{K}_{2n \times 2n} \bar{\mathbf{u}}_{1, 2n \times 1} = \mathbf{f}_{2n \times 1} \quad (26)$$

D'après l'algorithme de Stehfest, la transformée de Laplace inverse de $\bar{\mathbf{u}}_I$ pendant une durée spécifique t est

$$\text{donnée par [7]:} \quad \mathbf{u}_I(t) = (\ln(2)/t) \sum_{i=1}^N \mathbf{V}_i \bar{\mathbf{u}}_I(p) \quad (27)$$

D'où $p = (\ln(2)/t) \times i$ tel que $i = 1, 2, \dots, N$ et

$$V_i = (-1)^{N/2+i} \times \sum_{K=(i+1)/2}^{\min(i, N/2)} \frac{K^{N/2} (2K)!}{(N/2-K)! (K!) (K-1)! (i-K)! (2K-i)!} \quad (28)$$

La solution analytique suivant l'axe (Ox_1) de déplacement d'une bande viscoélastique sous chargement à l'extrémité à la forme suivante [8]:

$$u_1(t) = \frac{2 \times L}{1 + \exp(-t)} \quad (29)$$

3. Exemple numérique

3.1 Chargement uniforme au nœud 11

On considère une bande viscoélastique de longueur $L = 3$, de largeur $D = 1$ et d'épaisseur $H = 1$, encastrée sur le bord, celui qui lui est parallèle soumis à des forces constantes au nœud 11. Les deux autres bords sont libres (voir figure 3.1 ci-dessous). Un solide viscoélastique linéaire homogène avec les fonctions de relaxation constantes. Dans le calcul numérique, on prendra :

$$k_0 = E/3, \mu_0 = E/2, E = 1 \text{ Mpa et } \rho = 1 \text{ Kg/m}^3$$

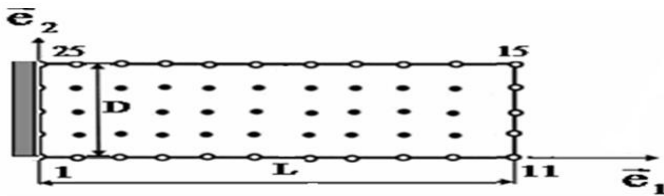


Figure 3.1 Une bande viscoélastique sous un chargement uniforme uni-axiale.

Nous utilisons la formule de quadrature de Gauss [9] avec 16 points pour calculer les intégrales dans les équations (24, 25) à la fois sur le domaine et la frontière. Dans le calcul numérique de la méthode MLPG, on prendra 28 nœuds sur la frontière et 27 nœuds dans le domaine intérieur pour une distribution régulière $n_t = 55$ (voir Fig. 3.1).

3.2 Résultats et discussions

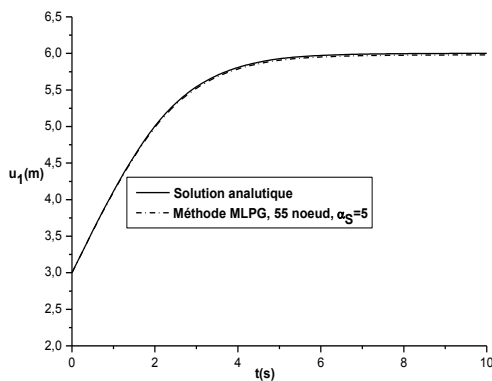


Figure 3.2 Variations de déplacement en fonction de t d'une bande viscoélastique homogène quasi-statique avec $n_t = 55$ nœuds.

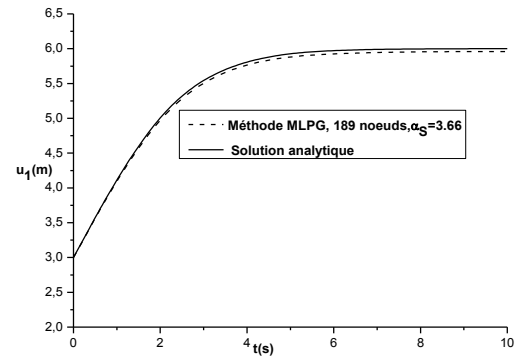


Figure 3.3 Variations de déplacement en fonction de t d'une bande viscoélastique homogène quasi-statique avec $n_t = 189$.

Les figures 3.2-3.3 représentent la variation de déplacement en fonction de t pour un chargement constant au nœud 11 avec le nombre de nœuds $n_t = 55$ et 189 auxquels correspondent $\alpha_S = 5$ et 3.66. Ce résultat obtenu par la méthode MLPG. On remarque que l'on a une coïncidence entre la méthode MLPG et la solution analytique.

Références

- [1] M. Grasselli, Determining the relaxation tensor in linear viscoelasticity of integral type. Japan J. Ind. Appl. Math, vol. 11:131-153, 1994.
- [2] R. M. Christensen, Theory of Viscoelasticity, Academia Press, New York, 1971.
- [3] H. Stehfest, Algorithm 368: numerical inversion of Laplace transform. Comm Assoc Comput Mach, vol. 13: 47-49, 1970.
- [4] J. Sladek · V. Sladek · Ch. Zhang, Local integral equation method for viscoelastic Reissner-Mindlin plates, Comput Mech 41:759-768, 2008.
- [5] G.H Paulino and Z. H. Jin, Correspondence principle in viscoelastic functionally graded materials. ASME J Appl Mechanics, vol. 68: 129-132, 2001.
- [6] S. N. Atluri, T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches in computational mechanics, Comput Mech, vol. 22:117-127, 1998.
- [7] E. Divo, A. J. Kassab, Boundary Element Method for Heat Conduction: with Applications in Non-Homogeneous Media Topics in Engineering Series vol. 44, WIT Press, Billerica, MA, 2002
- [8] M. Schanz, H. Antes, A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation. Comput Mech, vol. 20: 452- 459, 1997.
- [9] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri, Méthodes Numériques, Algorithmes, analyse et applications, © Springer-Verlag Italia, Milano, 2007.