Etude d'écoulements stationnairesdans un système de coordonnées hyperboliques par une méthode de transformation de coordonnées

S. AJGOUN[1], J.KHALID NACIRIetR.KHATYR
Laboratoire de Mécanique, Equipe : Modélisation en Mécanique des Fluides et Energie
Département de Physique, Faculté des Sciences Ain Chock,B.P. 5366 Maarif
Université Hassan II- Casablanca, Maroc
[1]Correspondance d'auteur : E-mail :s.ajgoun@outlook.fr

Résumé

Dans ce travail, basé sur les méthodes analytiques de transformations de coordonnées, les équations décrivant l'écoulement stationnaire d'un fluide newtonien incompressible sont exprimées dans un système de coordonnées hyperboliques (φ, ψ) où les lignes de coordonnées ψ=constante représentent les lignes de courant de l'écoulement et les lignes de coordonnées φ = constante sont à fixer arbitrairement. Des solutions analytiques sont obtenues dans différentes configurations d'écoulements, on retrouve notamment des écoulements de type Jeffrey Hamel ainsi que des solutions potentielles en fluide parfait.

Mots clefs : Coordonnées hyperboliques, Fonction de courant, Méthode de Martin.

1. Introduction

Les méthodes de transformations de variables sont d'usage courant pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Pour les équations de Navier Stokes, à l'exception de situations très particulières, il n'existe qu'un nombre réduit de solutions exactes pour lesquelles les termes non linéaires ne sont pas négligés [1]. Il est à noter que les solutions exactes servent de références pour la validation de nombreux codes de calcul ainsi que pour les méthodes asymptotiques et les techniques expérimentales.

M. H. Martin (1971)[2] a développé une méthode basée sur des transformations de coordonnées pour l'étude des écoulements plans de fluide visqueux. L'intérêt de cette méthode est d'introduire des variables indépendantes (φ, ψ) comme coordonnées curvilignes dans le plan d'écoulement (x,y), en imposant au nouveau système de coordonnées que les lignes de courant de l'écoulement ne dépendent que de l'une des coordonnées.

De nombreux travaux ont porté sur l'utilisation de cette méthode dans différentes situations. Ainsi, R. K. Naeem[3] a étendu l'approche de Martin pour déterminer des solutions des équations de Navier-Stokes pour un écoulement plan stationnaire d'un fluide compressible à viscosité constante. R. M. Barron et R. K. Naeem[5] ont utilisé la méthode de Martin pour l'étude numérique d'écoulements autour d'objets en considérant des coordonnées de Von mises. R. K. Naeem et S. A. Ali [6] ont de même utilisé des coordonnées de Von mises pour obtenir quelques solutions applicables aux différentes situations physiques.P. N. Kaloni et K. Huschilt[7], A. M. Siddiqui et al.[8], K. R. Rajagopal[9], A. M. Benharbit et A. M. Siddiqui[10], R. K. Naeem et S. S. Zia [11], F. Labropulu[12] ont explicitésdes solutions dans quelques situations particulières. S.A. Ali, A. Ara et N.A. Khan [13]ont appliqué la méthode de Martin pour l'étude d'écoulements de fluides non Newtoniens du second ordre.

L'objectif de ce travail est de présenter quelques solutions obtenues par application de la méthode de Martin au cas des coordonnées hyperboliques tout en validant la démarche retenue en retrouvant des solutions d'écoulements de type Jeffrey Hamel ainsi que des solutions potentielles en fluide parfait.

2. Formulation mathématique

Dans un système de coordonnées cartésiennes l'écoulement plan stationnaire d'un fluide Newtonien incompressible de viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ est régi par les équations traduisant les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement qui s'écrivent :

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \tag{1}$$

$$\rho\left(u_x u + u_y v\right) + p_x = \mu \Delta u \tag{2}$$

$$\rho\left(v_x u + v_y v\right) + p_y = \mu \Delta u \tag{3}$$

où les trois inconnues $p(x,y)$, $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont respectivement la pression et lesvitesseslongitudinale et transversale. En introduisant dans le système (1)-(3) les expressions de la vorticité ω et de l'énergie$h$suivantes :

$$\omega = v_x - u_y\,, \quad h = \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) + p \tag{4}$$

et en éliminant la pression, on obtient :

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \tag{5}$$

$$\mu\omega_x - \rho u\omega = h_y \tag{6}$$
$$\mu\omega_y - \rho v\omega = -h_x \tag{7}$$
$$\omega = v_x - u_y \tag{8}$$

Dans le système des équations (5) à (8) les inconnues du problème sont $u(x,y)$, $v(x,y)$, $\omega(x,y)$ et$h(x,y)$, le nombre d'inconnues est augmenté par rapport au système (1)-(3) mais l'ordre du système est réduit.

3. Transformation de coordonnées

L'écoulement considéré étant plan et incompressible, on définit la fonction de courant$\psi = \psi(x,y)$ par :

$$\psi_x = \rho v \qquad \psi_y = \rho u \tag{9}$$

Le réseau de lignes de courant $\psi(x,y)$ = constante peut être complété par un réseau, à ce stade arbitraire, de lignes $\varphi(x,y)$=constante pour générer un nouveau système de coordonnées.Ainsi, dans le plan physique, les variables indépendantes (x,y) peuvent être remplacées par les variables(φ, ψ)à l'aide des relations :

$$x = x(\varphi,\psi) \qquad y = y(\varphi,\psi) \tag{10}$$

L'introduction des variables indépendantes (φ,ψ) comme coordonnées curvilignes permet d'exprimer la première forme fondamentale sous la forme :

$$ds^2 = Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\psi + Gd\psi^2 \tag{11}$$

oùds est l'élément de longueur d'arc et oùE, F et G sont définis par :

$$E = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 \,, G = x_\psi^2 + y_\psi^2 \,, F = x_\varphi x_\psi + y_\varphi y_\psi \tag{12}$$

Il est à noter que les relations (10)peuvent être inversées pour obtenir$\varphi = \varphi(x, y)$ et$\psi = \psi(x, y)$ tel que :

$$y_\varphi = -J\psi_x,\ y_\psi = J\varphi_x,\ x_\psi = -J\varphi_y,\ x_\varphi = J\psi_y \tag{13}$$

Où J est le Jacobien de la transformation, défini par :

$$J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi = \sqrt{EG - F^2} = \pm W \tag{14}$$

Dans le système de coordonnées (φ,ψ) dans le plan physique, le système d'équations (5)-(8) à 4 inconnues $u(x,y)$, $v(x,y)$, $\omega(x,y)$, $h(x,y)$ peut être remplacé par [2]:

$$q = \frac{\sqrt{E}}{J} \tag{15}$$
$$Gh_\varphi - F\left(h_\psi + \omega\right) = -J\mu\omega_\psi \tag{16}$$
$$-Fh_\varphi + E\left(h_\psi + \omega\right) = J\mu\omega_\varphi \tag{17}$$
$$\omega = \frac{1}{\rho W}\left[\left(\frac{F}{W}\right)_\varphi - \left(\frac{E}{W}\right)_\psi\right] \tag{18}$$
$$h = \frac{E}{2\rho W^2} + p \tag{19}$$

L'objectif du présent travail étantd'expliciter quelques solutionspour un écoulement plan de fluide visqueux incompressible en imposant des conditions a priori sur E, G et F, il est commode d'introduire un système de coordonnées (ξ, η) telle que les lignesη = constante représentent les lignes de courant. Il est à noter que dans ce cas,le premier élément fondamental dans (ξ, η)est donné par :

$$ds^2 = E\varphi'^2 d\xi^2 + 2F\varphi'\psi' d\xi d\eta + G\psi'^2 d\eta^2 \tag{20}$$

4. Cas des coordonnées hyperboliques

On se propose d'introduire des coordonnées hyperboliques dans le plan (x,y) et de déterminer les classes d'écoulement stationnaires plans pour lesquelles les lignes de courant coïncident avec une ligne de coordonnées. Le système de coordonnées hyperboliques est défini par les variables ηet ξ qui vérifient :

$$x = \eta e^{\xi}, \quad y = \eta e^{-\xi}, \tag{21}$$

En se limitant au plan x>0 et y>0, l'équation (21) se met sous la forme inversée suivante :

$$\eta = \sqrt{xy} \ , \quad \xi = ln\sqrt{\frac{x}{y}} \tag{22}$$

On note que les lignes iso-valeurs pourηdéfinissent une famille d'hyperboles dans le plan (x,y) tandis que les lignesiso-valeurs pourξ sont des droites passant par l'origine.

4.1. Cas où$\boldsymbol{\psi = \psi(\eta)}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{\varphi = \varphi(\xi)}$

On considère la situation pour laquelle la fonction de courant ne dépend que de la variable η, dans ce cas et à l'aide des variables (ξ, η), le système 15-18s'écrit:

$$q = \frac{2\psi'(\eta)}{\sqrt{3}\sqrt{2\cosh\ 2\xi}} \tag{23}$$
$$h_\eta = -\rho\psi'\omega + \mu\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\omega_\xi}{\eta} - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{3}}\right) \tag{24}$$
$$h_\xi = \mu\left(\frac{\omega_\xi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\eta\omega_\eta\right) \tag{25}$$
$$\omega = -\frac{2}{3\rho\cosh\ 2\xi}\frac{(\eta\psi')_\eta}{\eta} \tag{26}$$

En utilisant la condition d'intégrabilité($h_{\xi\eta} = h_{\eta\xi}$), et en remarquant d'après (26) que la vorticité s'écrit sous la forme $\omega = A(\xi)B(\eta)$avec :

$$A(\xi) = -\frac{2}{3\rho\cosh\ 2\xi} \ , \quad B(\eta) = \frac{(\eta\psi')_\eta}{\eta} \tag{27}$$

On obtient une équation différentielle pour $B(\eta)$ qui s'écrit :

$$B''(\eta) + \frac{B'(\eta)}{\eta}\left(1 - \frac{A'(\xi)}{A(\xi)}\right) + \frac{B(\eta)}{\eta^2}\left[\frac{A''(\xi)}{A(\xi)} - \frac{\sqrt{3}\rho}{2\mu}\frac{A'(\xi)\eta}{A(\xi)}\psi'(\eta)\right] = 0 \tag{28}$$

La seule solution admissible pour cette équation est $B(\eta) = 0$, dans ce cas on a:

$$\psi(\eta) = K_2\ln(\eta) + K_3 \tag{29}$$
$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{K_2}{2y} \ , \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{K_2}{2x} \tag{30}$$
$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{K_2}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \tag{31}$$
$$h(x,y) = \rho\frac{K_2^2}{8}\left(\frac{1 - 2\ln(y)}{x^2} + \frac{1 - 2\ln(x)}{y^2}\right) + \mu K_2\left(\frac{x}{y^3} - \frac{y}{x^3}\right) \tag{32}$$
$$p(x,y) = -\rho\frac{K_2^2}{4}\left(\frac{\ln(y)}{x^2} + \frac{\ln(x)}{y^2}\right) + \mu K_2\left(\frac{x}{y^3} - \frac{y}{x^3}\right) \tag{33}$$

La solution explicitée par les expressions (29) à (33), où K_2 et K_3 sont des constantes, correspond à une vorticité nulle, donc à un écoulement irrotationnel dans le plan (x,y). Il s'agit d'un écoulement potentiel pour lequel les lignes de courant dans le plan (x,y) sont des familles d'hyperboles.

4.2. Cas où $\boldsymbol{\psi = \psi(\xi)}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{\varphi = \varphi(\eta)}$

Dans ce cas les équations(15) à (18) s'écrivent :

$$q = \frac{2\psi'(\xi)}{\sqrt{3}\eta\sqrt{2\cosh\ 2\xi}} \quad (34)$$

$$h_\xi = -\rho\psi'\omega + \mu\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\eta\omega_\eta - \frac{\omega_\xi}{\sqrt{3}}\right) \quad (35)$$

$$h_\eta = \mu\left(\frac{\omega_\eta}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\omega_\xi}{\eta}\right) \quad (36)$$

$$\omega = -\frac{2}{3\rho\eta^2}\frac{(\psi')_\xi}{\cosh\ 2\xi} \quad (37)$$

En utilisant la condition d'intégrabilité($h_{\xi\eta} = h_{\eta\xi}$), et en remarquant d'après (37) que la vorticité s'écrit sous la forme $\omega = A(\eta)B(\xi)$avec :

$$A(\eta) = -\frac{2}{3\rho\eta^2}, \quad B(\xi) = \frac{\psi''(\xi)}{\cosh\ 2\xi} \quad (38)$$

L'équation différentielle en $B(\xi)$ s'écrit :

$$B''(\xi) - B'(\xi)\left(\eta\frac{A'(\eta)}{A(\eta)}\right) + B(\xi)\eta\left[\eta\frac{A''(\eta)}{A(\eta)} + \frac{A'(\eta)}{A(\eta)}\left(1 - \frac{\sqrt{3}\rho}{2\mu}\psi'(\xi)\right)\right] = 0 \quad (39)$$

Ce qui se traduit par l'équation différentielle d'ordre 4 ci après pour la fonction de courant :

$$\psi^{(4)} + (2 - 4\tanh 2\xi)\psi^{(3)} + (8tanh^2(2\xi) - 4\tanh(2\xi))\psi^{(2)} + \frac{\rho\sqrt{3}}{\mu}\psi^{(2)}\psi^{(1)} = 0 \quad (40)$$

L'Equation (40) est résolu numériquement à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Elle correspond à un écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans non parallèles (écoulement de Jeffrey Hamel) dans le système de coordonnées (ξ, η).

5. Résultats

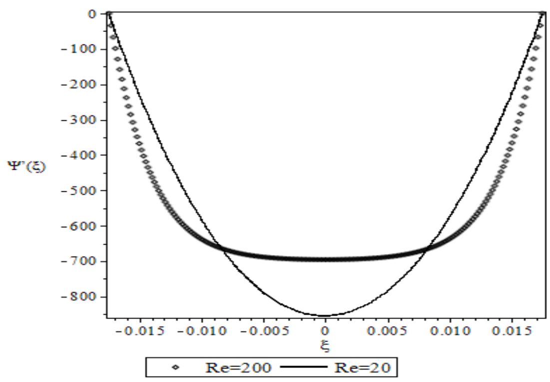

Figure1 :profils de vitesse en canal convergent

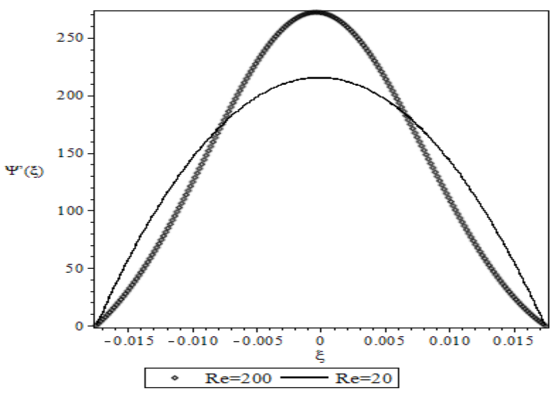

Figure2 : profils de vitesseen canal divergent

Les Figures 1 et 2 représente les variations de ψ'en fonction de la coordonnée ξpour un canal convergent et un canal divergent. La fonction $\psi'(\xi)$ est reliée à la vitesse de fluide dans un canal.Les formes de profils observés sont analogues à ceux d'un écoulement de Jeffrey-Hamel.

Références

[1]P.G. Drazin, N.Riley, The Navier-Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. CUP, Cambridge (2006).

[2]M. H. Martin, The Flow of a Viscous Fluid 1, Communicated by C. TRUESDELL, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 41 (4) (1971) 266-286.

[3]R. K. Naeem, On exact solutions for Navier-Stokes equations for viscous compressible fluid. *A major paper of Master of Science at The University of Windsor*, Ontario, Canada, (1984).

[4] R. M. Barron, Computation of incompressible potential flow using V on-Mises coordinates. *Math. Comput. Simulation*, 31 (3) (1989) 177-188.

[5] R. M. Barron and R. K. Naeem, Numerical solutions of transonic flows on a stream function coordinate system. *Int. J. Numer. Methods fluids*, 6 (10) (1989) 1183-1193.

[6] R. K. Naeem and S. A. Ali, A class of exact solutions to equations governing the steady plane flows of an incompressible fluid of variable viscosity via Von-Mises variables. *Int. J. App. Math and Engng.*, 6 (2) (2001) 395 – 436.

[7] P. N.Kaloni and K. Huschilt, Semi inverse solutions of a non-Newtonian fluid. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 19 (1984) 373 – 381.

[8] A. M.Siddiqui, P. N. Kaloni and O. P. Chandna, Hodograph transformation methods in non-Newtonion fluids. *Journal of Engng. Maths.*, 19 (1985) 203-216.

[9] K. R. Rajagopal, On decay of vortices in a second grade fluid. *Meccanica*, 9 (1980) 185- 188.

[10] A. M. Benharbit and A. M. Siddiqui, Certain solutions of the equations of the planar motion of a second grade fluid for steady and unsteady cases. *Acta Mech.*, 94 (1992) 85 – 96.

[11] R. K. Naeem and S. S. Zia, Exact solutions to an incompressible second grade fluid flow equations. *Int. J. App. Math. &Engng.*, 8(1) (2003) 71-85.

[12] F. Labropulu, Exact solutions of non-Newtonian fluid flows with prescribed vorticity, *Acta Mech.*, 141 (2000) 11-20.

[13] S. A. Ali, A. Ara and N. A. Khan, Martin's method applied to steady plane flow of a second grade fluid, *Int. J. of Appl. Math and Mech.*, **3**(3) (2007) 71-81.

[14] R. K. Naeem and R. Shaheen, Some new exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations for a viscous incompressible fluid in the presence of unknown external force, *Int. J. of Appl. Math and Mech.* 7 (11) (2011) 83-97.