

# Stabilité de la convection naturelle due à un gradient de température horizontal dans un fluide en rotation uniforme

A. MEDELFEF<sup>1,2</sup>, D. HENRY<sup>2</sup>, A. BOUABDALLAH<sup>1</sup>, S. KADDECHE<sup>3</sup>, R. BOUSSAA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Thermodynamique et Systèmes Energétiques, Faculté de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, BP 32, 16111 Bab Ezzouar, Alger, Algérie. (abs.medelfef@gmail.com)

<sup>2</sup>Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, CNRS/Université de Lyon, Ecole Centrale de Lyon / Université Lyon 1 / INSA de Lyon, ECL, 36 Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France. (daniel.henry@ec-lyon.fr)

<sup>3</sup>Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie – Laboratoire de Recherche Matériaux, Mesures et Applications – LR 11 ES 25- Université de Carthage - BP 676, 1080 Tunis Cedex, Tunisie (slimkaddeche@yahoo.fr)

## Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'effet de la rotation autour de l'axe vertical sur la convection naturelle créée par un gradient de température horizontal au sein d'une couche fluide infinie. L'étude présentée montre que la rotation retarde l'apparition des différents types d'instabilités affectant la configuration considérée. Cette stabilisation est d'autant plus marquée que le nombre de Prandtl est élevé dans le cas des parois adiabatiques alors que dans le cas de parois conductrices, cet effet semble moins significatif. Une attention particulière est portée aux instabilités de type Rayleigh-Bénard se développant dans la région des parois lorsque celles-ci sont conductrices.

**Mots clefs :** *Stabilité linéaire, écoulement tournant, convection naturelle, écoulement parallèle.*

## 1. Introduction

On s'intéresse dans cette étude à l'écoulement généré par un gradient horizontal de température (*perpendiculaire à la gravité*), se développant entre deux plans horizontaux supposés infinis. L'objectif est d'étudier la stabilité de ce type d'écoulement quand le fluide est soumis à une rotation uniforme. Ces écoulements de convection se retrouvent dans des situations pratiques telles que la croissance cristalline (procédés de Bridgman horizontal) où le bain fondu devient le siège d'instabilités qui impactent la phase solide au fur et à mesure que le front de solidification avance, en étant à l'origine d'une dégradation de la qualité du cristal obtenu [1].

A plus grande échelle, la convection est aussi présente dans les écoulements géophysiques et astrophysiques. Ce type d'écoulement assure, par exemple, les déplacements des masses d'air au niveau des régions tropicales (vents alizés). Ce mouvement d'air est connu sous le nom de cellules de Hadley [2].

La stabilité de l'écoulement de Hadley a été au centre de nombreuses investigations scientifiques, notamment en ce qui concerne le contrôle actif de la transition critique vers la turbulence. Nous pouvons citer, entre autres, les travaux de Hart [3], de Laure et Roux [4], de Gershuni *et al.* [5] et plus récemment les travaux liés à l'action d'ondes acoustiques de Dridi *et al.* [6] et à la magnétohydrody-

namique de Kaddeche *et al.* [7] et de Hudoba *et al.* [8]. Cependant, l'effet de la rotation sur cet écoulement de Hadley, effet qui joue un rôle important dans les situations planétaires en raison de la rotation de la terre, n'a jamais été étudié à notre connaissance. Les équations gouvernant notre écoulement sont les équations de Navier Stokes dans le cadre de l'hypothèse de Bousinesq (celle-ci consiste à considérer que la variation de la température n'agit que sur le terme de flottabilité). D'autres termes apparaissent dans le cas d'écoulements tournants (on se place dans référentiel tournant dont le vecteur rotation  $\Omega$  constant est vertical) : ce sont les forces d'inertie de Coriolis et d'entraînement. Cependant, cette dernière peut être intégrée dans le gradient de pression. Enfin, l'équation de conservation de l'énergie est aussi prise en compte dans la mesure où notre écoulement n'est pas isotherme.

Les paramètres de caractéristiques d'un tel écoulement sont : le nombre de Grashof  $Gr$  représentant le rapport entre les forces de flottabilité et les forces visqueuses, le nombre de Prandtl  $Pr$  caractérisant le rapport entre le transfert de la chaleur par convection et par diffusion et finalement le nombre de Taylor  $Ta$  qui représente le rapport entre la force de Coriolis et les forces visqueuses.

## 2. Ecoulement de base

Nous nous proposons d'étudier l'écoulement parallèle d'un fluide à propriétés thermophysiques constantes. Le fluide est confiné dans la direction verticale entre deux plans parallèles séparés d'une distance  $h$  et soumis à une rotation constante. La convection est engendrée par un gradient de température horizontal constant ce qui nous amène à chercher un profil de température du type  $T(\mathbf{x},z)=x+\Theta(z)$ . La géométrie et les coordonnées adoptées dans ce travail sont présentées sur la figure 1.

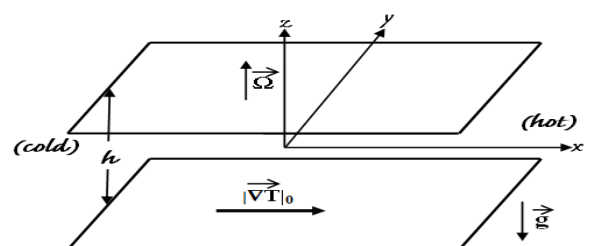


Figure 1 : Géométrie étudiée et coordonnées.

Les conditions aux limites associées à cette géométrie sont données par :  $U(z=\pm h/2)=V(z=\pm h/2)=0$  pour le profil de vitesse  $T(x,z=\pm h/2)=x$  (parois conductrices) ou  $[\partial T/\partial z]_{(x,z=\pm h/2)}=0$  (parois adiabatiques) pour le profil de température.

Le profil de vitesse obtenu dans une telle situation comporte deux composantes :  $U(z)$ , composante longitudinale **due au gradient de température** appliqué et  $V(z)$ , composante transverse **due à la force de Coriolis** induite par la rotation. Il est à noter que cette dernière composante  $V(z)$  est nulle dans le cas où il n'y a pas de rotation et que  $U(z)$  coïncide avec le profil classique de Hadley.

Les figures 2a et 2b représentent l'effet du nombre de Taylor sur les deux composantes du profil de vitesse. Pour  $Ta=0$ , l'écoulement est longitudinal, correspondant au profil cubique de Hadley avec une vitesse transverse nulle. Lorsque le nombre de Taylor augmente, on constate l'apparition d'une composante transverse qui dévie l'écoulement d'une manière particulière.

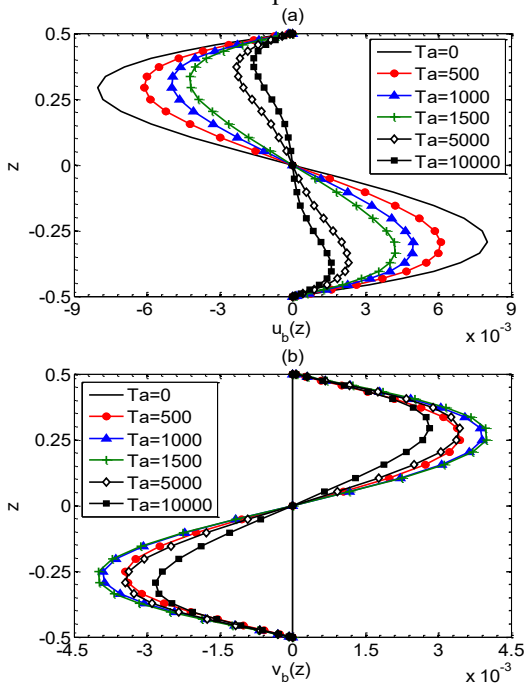


Figure 2 : Profils de l'écoulement de base : (a)  $U(z)/Gr$  et (b)  $V(z)/Gr$ .

En effet, si  $U(z)>0$  ( $U(z)<0$ ), alors on voit que  $V(z)<0$  ( $V(z)>0$ ), résultant en une déviation de l'écoulement vers la droite. On observe aussi une atténuation de la composante longitudinale, accompagnée d'une amplification (pour  $Ta<1500$ ), puis d'une atténuation de la composante transverse due à la rotation. Par ailleurs, les profils de vitesse dépendent linéairement du nombre de Grashof, ce qui rend les quantités  $U(z)/Gr$  et  $V(z)/Gr$  indépendantes de  $Gr$ .

### 3. Stabilité linéaire

La stabilité de cet écoulement a été réalisée en étudiant l'évolution de perturbations infinitésimales du type mode propre :  $(u,v,w,p,\theta)\sim f_i(z)\exp(ik_x x + ik_y y + \sigma t)$ , où  $k_x$  et  $k_y$  représentent respectivement les nombres d'onde dans les directions longitudinale et transversale et  $\sigma=\sigma_r+i\sigma_i$  représente le taux d'amplification temporelle de l'instabilité.

Ce faisant, nous obtenons un problème aux valeurs propres que l'on résout à l'aide d'un code basé sur une méthode de collocation spectrale. Le nombre de Grashof critique  $Gr_c$  correspondant à la première valeur propre dont la partie réelle est nulle, tandis que les autres valeurs propres sont toutes de partie réelle négative, est alors obtenu par le biais d'une procédure de minimisation dans l'espace des nombres d'onde  $(k_x, k_y)$ . Quand la partie imaginaire de la valeur propre marginale est égale à zéro, on dit que l'instabilité est stationnaire. Dans le cas contraire, l'instabilité est oscillatoire.

Dans ce qui suit, nous illustrons les seuils de stabilité linéaire en fonction du nombre de Taylor pour plusieurs plages du nombre de Prandtl où dominent les instabilités stationnaires de cisaillement ( $Pr\sim O(10^{-2})$ ), les instabilités oscillatoires ( $Pr\sim O(10^{-1})$ ) et finalement une instabilité d'origine thermique (Rayleigh-Bénard) ( $Pr\sim O(1)$  avec parois conductrices).

### 4. Résultats de la stabilité linéaire

L'instabilité stationnaire de cisaillement est dominante pour les très faibles nombres de Prandtl. Les études précédentes ont montré que, pour  $Ta=0$ , cette instabilité est bidimensionnelle et se manifeste par des rouleaux transversaux ( $k_x\neq 0, k_y=0$ ). L'instabilité oscillatoire est liée à la compétition entre la déstabilisation par le profil de vitesse et la stratification stable de la température. Elle est tridimensionnelle et correspond, dans le cas sans rotation, à des rouleaux longitudinaux ( $k_x=0, k_y\neq 0$ ).

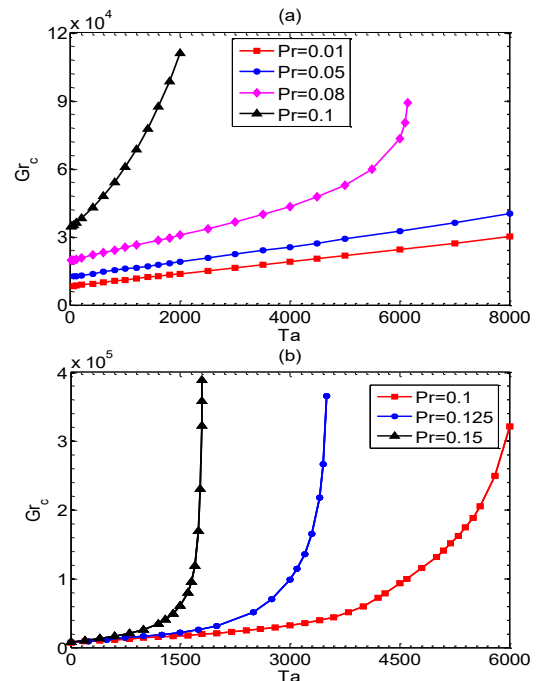


Figure 3 : Seuils critiques d'instabilités obtenus pour des parois adiabatiques en fonction du nombre de Taylor : (a) Instabilité de cisaillement, (b) Instabilité oscillatoire.

L'instabilité d'origine thermique (modes de Rayleigh) est due au fait qu'il existe deux régions de stratification instable de la température au voisinage des parois dans le

cas où les parois sont conductrices. Cette instabilité est aussi tridimensionnelle et se présente sous la forme de rouleaux longitudinaux stationnaires. Dans le cas où la rotation est appliquée, toutes ces instabilités deviennent tridimensionnelles et obliques avec  $(k_x \neq 0, k_y \neq 0)$ .

Les figures 3a et 3b illustrent pour le cas où les parois sont adiabatiques, la variation du nombre de Grashof critique en fonction du nombre de Taylor pour les modes instables stationnaires et oscillatoires. L'effet du nombre de Prandtl est aussi pris en compte en procédant à la variation de ce dernier dans la plage  $[O(10^{-2}), O(1)]$ .

Pour ces deux types d'instabilité, on constate un décalage des seuils vers des valeurs supérieures à celles obtenues dans le cas sans rotation aussi bien pour le cas thermiquement conducteur qu'adiabatique. Ce décalage correspond à une stabilisation de l'écoulement par la rotation.

Nous voyons aussi sur ces figures que plus le nombre de Prandtl est élevé plus la stabilisation est significative. Notons que cet effet n'est observé que pour le cas des parois adiabatiques. Pour des parois conductrices, le nombre de Prandtl n'a pratiquement pas d'effet sur la stabilisation de l'écoulement.

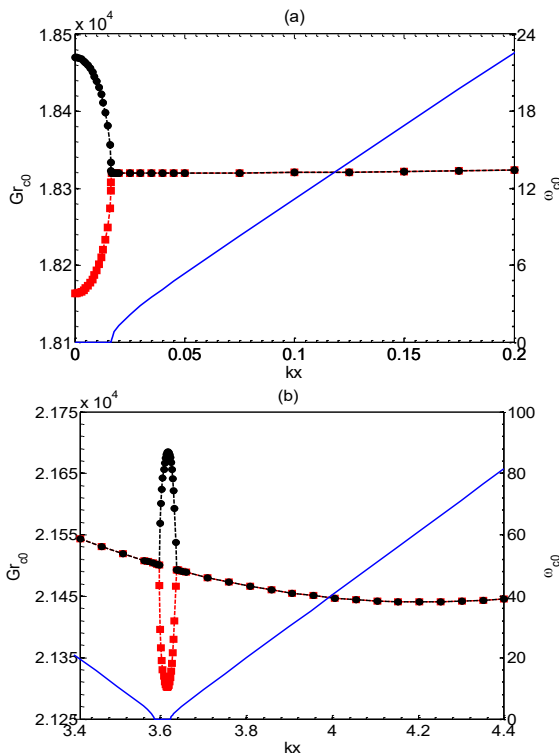


Figure 4 : Seuils marginaux des modes de Rayleigh (lignes avec symboles) et pulsation critique (ligne continue bleue) en fonction du nombre d'onde longitudinal  $k_x$  pour  $Pr=0.7$  : (a)  $Ta=0$  (b)  $Ta=500$ .

Pour les modes de Rayleigh (Fig. 4), outre l'instabilité stationnaire habituelle, nous avons observé l'existence d'une instabilité oscillatoire qui émerge suite à une collision entre les deux premières valeurs propres stationnaires générant une paire de valeurs propres complexes conjuguées. Les deux seuils stationnaires tracés en fonction de  $k_x$  forment une boucle qui se referme sur le seuil

oscillatoire (voir Fig. 4). Dans le cas sans rotation, le seuil critique est donné par le minimum des seuils stationnaires, mais pour  $Ta$  assez grand, c'est le minimum du seuil oscillatoire qui désormais fixe le seuil critique. Cette transition va dépendre du nombre de Prandtl. Elle a lieu à  $Ta \approx 4400$  pour  $Pr=0.7$  et à  $Ta \approx 400$  pour  $Pr=7$ .

## Conclusion

Cette étude s'est intéressée à l'écoulement généré par un gradient de température horizontal appelé *écoulement de Hadley*. L'effet de la rotation a été considéré pour deux cas de conditions aux limites thermiques (isolantes et conductrices) et pour trois types d'instabilités. La stabilisation par la rotation est observée dans tous les cas considérés. Cette stabilisation est plus significative dans le cas où les parois sont adiabatiques, notamment quand le nombre de Prandtl augmente. Dans le cas où les parois sont conductrices, le nombre de Prandtl a peu d'effet. Cette étude montre aussi l'existence d'une collision de valeurs propres dans le cas des instabilités dues à la stratification instable de température (parois conductrices), collision qui a pour effet l'apparition d'une instabilité oscillatoire à partir d'une instabilité stationnaire.

## Références

- [1] Dhanaraj G., Byrappa K., Prasad V. and Dudley M. *Springer Handbook of Crystal Growth*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [2] Hadley G. S. *Concerning the cause of the general trade winds*. Phil. Trans., 29:58–62, 1735.
- [3] Hart J. E. *Stability of thin non-rotating Hadley circulations*. J. Atmos. Sci., 29:687–696, 1972.
- [4] Laure P. and Roux B. *Linear and non-linear analysis of the Hadley circulation*. J. Cryst. Growth, 97:226–234, 1989.
- [5] Gershuni G., Laure P., Myznikov V., Roux B. and Zhukhovitsky E. *On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers*. Microgravity Q., 2:141–151, 1992.
- [6] Dridi W., Henry D. and Ben Hadid H. *Stability of buoyant convection in a layer submitted to acoustic streaming*. Phys. Rev. E, 81:056309, 2010.
- [7] Kaddeche S., Henry D. and Ben Hadid H. *Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient*. J. Fluid Mech., 480:185–216, 2003.
- [8] Hudoba A., Molokov S., Aleksandrova S. and Pedcenko A. *Linear stability of buoyant convection in a horizontal layer of an electrically conducting fluid in moderate and high vertical magnetic field*. Phys. Fluids, 28 :094104, 2016.