Etude de stabilité linéaire d'un écoulement sur un plan incliné en prsence d'oscillations verticales et de surfactant

A. ELJAOUAHIRY[1], S.ANISS[1]

1. Université Hassan II, Faculté des Sciences Ain Chock, Laboratoire de Mécanique Km 8 Route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc saniss@fsac.ac.ma

Résumé :
La stabilité de la dynamique d'un film liquide mince soumis à des oscillations périodiques et verticales en présence de surfactant est étudié. Pour la résolution spatiale, nous utilisons les méthodes spéctrales de collocation de Chebychev et pour la résolution temporelle, la théorie de Floquet est appliquée. Les résultats montrent que la présence de surfactant peut stabiliser l'écoulement.

Mots clés : *Stabilité linéaire, Théorie de Floquet, Oscillations périodiques, Surfactant*

1 Introduction

La stabilité linéaire de l'écoulement sur un plan incliné de films à surface libre a été largement étudié dans la littérature. La connaissance des conditions d'apparition d'instabilités dans de tels écoulements présente des intérêts tant du point de vue fondamental qu'appliqué. Ce problème intéresse particulièrement le secteur industriel faisant appel à des méthodes de couchage ou revêtement de surfaces (industrie alimentaire, photographique, papeterie...). La nécessité de la présence d'inertie pour le déclenchement de ces instabilités a été mis en evidence par Benjamin [1] et puis par Yih [2]. Dans ces travaux, le problème a été posé d'une maniere formelle et une analyse de stabilité linéaire a été effectuée dans le cas d'un écoulement d'un film de fluide Newtonien sur un plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle θ. L'étude analytique de ce problème basée sur la théorie des grandes longueurs d'ondes a montré que l'écoulement est linéairement instable pour $Re_c = \frac{5}{4\ cot(\theta)}$.

La stabilité linéaire d'un film liquide s'écoulant sur un plan incliné et vibrant en absence de surfactant a été étudié par Woods et Lin [4], ils ont établi l'équation d'Orr-Sommerfeld. Pour la résoudre, ils ont utilisé la théorie de Floquet avec une intégration numérique sur une période d'oscillation. Ils ont montré que l'application de vibration sur le plan incliné peut retarder l'instabilité du film, mais génère l'instabilité induite par la vibration plane.

En absence de vibration, Blyth et Pozrikidis [5] ont réalisé une analyse de stabilité d'un film liquide dans un plan incliné recouvert par une monocouhe de surfactant. La résolution numérique de l'équation d'Orr-Sommerfeld révèle l'occurrence des deux modes, un mode de Marangoni stable et un mode de Yih instable. Ils ont démontré que le taux de décroissance du nombre Marangoni est inférieur à celui du mode déterminé par Yih. Cependant, comme le nombre de Reynolds augmente des faibles valeurs, le taux de croissance du mode de Yih augmente, tandis que le mode Marangoni reste pratiquement constant. Finalement, alors que le taux de croissance est toujours négatif, le mode de Yih dépasse le mode de Marangoni, avant de devenir instable. Gao et Lu [6]ont détecté l'effet stabilisant et déstabilisant d'un surfactant insoluble sur la stabilité linéaire d'une couche fluide infinie avec une surface libre déformable couverte par un surfactant insoluble et limité par une plaque horizontale rigide oscillante dans son propre plan.

Dans le présent document, nous étudions la stabilité linéaire d'un écoulement sur un plan incliné en prsence d'oscillations verticales et de surfactant, et nous analysons l'influence du surfactant sur le taux de croissance des ondes.

2 Formulation du système

Considérons un film fluide Newtonien incompressible de densité ρ, de viscosité dynamique μ et d'épaisseur d s'écoulant le long d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale et infinie dans la direction x, voir Figure1.

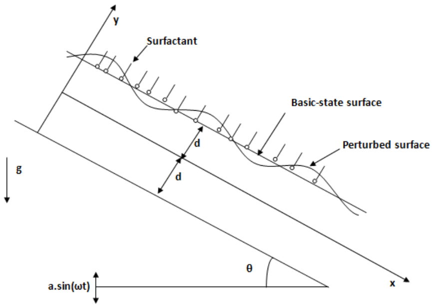

FIGURE 1 – Configuration de l'écoulement eťudie.

Supposons que tout le système est soumis à un mouvement oscillatoire verticale selon la loi déplacement $z =$

$a \sin \omega^* t^*$, où ω^* est la fréquence dimensionnelle, a est le paramètre d'amplitude du mouvement oscillatoire. La couche du fluide est recouverte par une couche de surfacatnt insoluble. L'écoulement est supposé bidimensionnel. Les équations qui régissent la dynamique du film s'écrivent dans le repère relatif :

$$(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{v}^*.\nabla)\mathbf{v}^* = -\nabla \mathbf{P}^* + \frac{1}{\rho}\Delta \mathbf{v}^* + \mathbf{g} - \mathbf{A}(t^*) \quad (1)$$
$$\nabla.\mathbf{v}^* = \mathbf{0}, \quad (2)$$

où $\mathbf{v}^*(u^*, v^*)$ est le champ de vitesse du fluide, $\mathbf{P}^*$ est la pression, $\mathbf{g}$ est le champ gravitationnel et $\mathbf{A}(t) = (a_x^* \omega^{*2} \sin(\omega^* t), a_y^* \omega^{*2} \sin(\omega^* t))$ est l'accélérations due aux vibrations, avec $(a_x^*, a_y^*) = (-a \sin(\theta), a \cos(\theta))$. La surface libre du fluide est décrite par $y = \eta(x^*, y^*)$, et recouverte par une mono-couche de surfactant insoluble avec la concentration $\Gamma(x, y)$. La relation entre la tension superficielle et la concentration de surfactant est donnée par $\sigma = \sigma_0 - E(\Gamma - \Gamma_0)$ avec E est l'élasticité de surface. Γ_0 est la valeur de base du surfactant correspondant à une tension superficielle uniforme σ_0. L'équation de transport de la concentration du surfactant a été donnée dans des travaux antérieurs ([5],[6]) :

$$\frac{\partial(\sqrt{1 + \frac{\partial \eta^{*2}}{\partial x^*}}\Gamma^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\sqrt{1 + \frac{\partial \eta^{*2}}{\partial x^*}}\Gamma^* u^*)}{\partial x^*} = D_s \frac{\partial}{\partial x^*}(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial \eta^{*2}}{\partial x^*}}}\frac{\partial \Gamma^*}{\partial x^*}), \quad (3)$$

où D_s est la diffusivité surfacique de surfactant. On reprend ensuite l'adimensionnement suivant : $x = x^*/d$; $y = y^*/d$; $t^* = \frac{t}{d/V_o}$; $p = p^*/\rho V_o^2$; $\omega = \omega^* d/V_o = 1$. La Vitesse et la pression à l'équilibre ont donnés par :

$$\overline{U}(y, t) = \frac{1}{2} Fr Re \sin(\theta)(3 + 2y - y^2) + \overline{u}_0(y, t) \quad (4)$$

avec,

$$\overline{u}_0(y, t) = F(y)\sin(t) + G(y)\cos(t)$$
$$F(y) = \frac{i a_x}{2}(-\frac{\cosh(r(1-y))}{\cosh(2r)} + \frac{\cosh(\overline{r}(1-y))}{\cosh(2\overline{r})})$$
$$G(y) = a_x(1 - \frac{1}{2}(\frac{\cosh(r(1-y))}{\cosh(2r)} + \frac{\cosh(\overline{r}(1-y))}{\cosh(2\overline{r})}))$$
$$P_e = P_0 - (Fr\cos(\theta) + a_y \sin(t))(y - 1)$$

et $r = (1 + i)\beta$, $\beta = \sqrt{Re/2}$, P_0 est une pression de référence à l'interface. Le système d'équations adimensionnelles linéarisées correspondant à la perturbation de l'état d'équilibre régissant l'instabilité est léquation d'Orr-Sommerfeld :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha\overline{U})(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2)\phi - i\alpha\overline{U}_{yy}\phi = \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2)^2\phi \quad (5)$$

où ϕ est l'amplitude de la fonction de courant. Les conditions à la paroi en y=-1 sont :

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

Les conditions linéarisées à la surface libre en y=1 sont :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \alpha^2\phi + \overline{U}_{yy}\eta + i\alpha\frac{Ma}{Ca}\Gamma = 0 \quad (7)$$
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t \partial y} - \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2}{\partial y2} - 3\alpha^2)\frac{\partial\phi}{\partial y} - i\alpha\overline{U}\frac{\partial\phi}{\partial y} + i\alpha(a_y\sin(t) + Fr\cos(\theta) + \alpha^2 We)\eta = 0 \quad (8)$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + i\alpha\phi + i\alpha\overline{U}\eta = 0 \quad (9)$$
$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} + i\alpha\overline{U}\Gamma + i\alpha\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{1}{Pe}\alpha^2\Gamma = 0 \quad (10)$$

où η et Γ sont les amplitude complexes des perturbations de surface et de surfactant, respectivement. Les équations (7-10) définissent les conditions des contraintes tangentielles, contraintes normales, la condition cinématique à l'interface et l'équation de transport du surfactant, respectivement. Les grandeurs adimensionnels sont suivant :

$$Re = \frac{\rho V_0 d}{\mu}, Fr = \frac{gd}{V_0^2}, We = \frac{\sigma_0}{\rho V_0^2 d}, Ma = \frac{E\Gamma_0}{\sigma_0},$$
$$Pe = \frac{V_0 d}{D_s}, Ca = \frac{V_0 d}{\sigma_0} = \frac{1}{ReWe} \quad (11)$$

3 Procédure numérique

Pour la discrétisation spatiale de notre problème $(5) - (10)$, nous avons utilisé une méthode spectrale faisant appel aux polynomes de Chebyshev qui se base sur les points de collocation de Gausse-Lobatto, Weideman et Reddy [7]. Donc leséquations $(5) - (10)$ se résume au système suivant :

$$\mathbf{B}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \mathbf{A}(t)\phi \quad (12)$$

où la matrice **A** est périodique de période T et la matrice **B** est constante. D'après la théorie de Floquet (voir, Nayfeh et Mook [9]), il existe une matrice inversible périodique de période T (notée P(t)) et une matrice constante (notée R) telles que le système fondamental de solution $\phi(t)$ associé à l'équation (12) s'écrit $\phi(t) = P(t)e^{Rt}, \gamma_i = \frac{1}{T}\ln\lambda_i$, où λ_i sont les valeurs propres de la matrice R et

γ représente le taux de croissance, $Re(\gamma)$ est l'exposant caractéristique du mode le plus instable. Par conséquent, la stabilité du systéme peut être déterminée par $Re(\gamma)$.

4 Analyse des résultats numériques

Tableau1. Comparaison de la vitesse d'amplification.

Floquet exposant γ (le présent travail)	0.0037401
Partie imaginaire deω_i(Orszag 1971)	0.0037396

Le tableau1 montre une comparaison des valeurs de l'exposant de Floquet γ avec les valeurs propres de l'équation d'Orr-Sommerfeld pour l'écoulement de Poiseulle plan dans le cas $a_x = a_y = 0, \theta = 90, et\ We = 0$, l'exposant de Floquet coincide avec la valeur propre donnée par Orszag [8]).

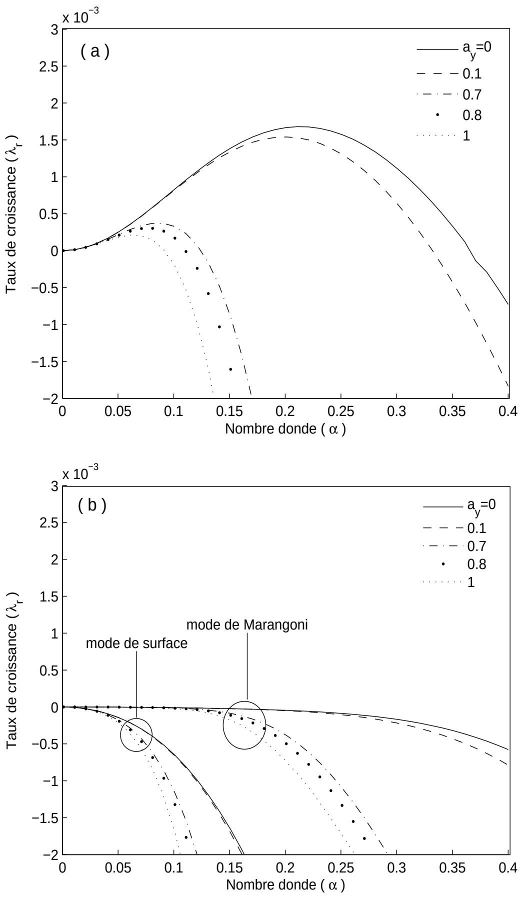

FIGURE 2 – Taux de croissance en fonction du nombre d'onde pour Re=5, $a_x = 0$, We=0.016, Fr=0.01, $\theta = 90$, $Pe = 10^3$ et $(a)Ma = 0$, $(b)Ma = 1$.

la convergence des résultats est pratiquement assurée à partir de N =30. Les résultats présentés dans dans la suite ont été obtenus en utilisant N =35. La figure2(a), montre comment le taux de croissance des grandes longueur ondes d'un film ruisselant sur un plan incliné sans surfactant(Ma=0) et non forcé ($a_y = 0$) peut être réduit par l'augmentation d'amplitude pour les paramètres de lécoulement indiqués dans la légende de la figure. Les résultats (Ma=0) sont en accord avec ceux présentés par Woods et Lin [4]. Les résultats en présence d'un surfactant représente dans la figure2(b), révèlent l'apparition de deux modes, le mode de surface associée à l'onde de perturbation superposée à l'onde de surface du film(mode de Yih), le mode de Marangoni qui est associée à la concentration de surfactant. Le taux de croissance des trois modes normaux est négatif, donc l'écoulement est stable pour tout nombre d'onde, le surfactant a un effet stabilisant.

5 Conclusion

La stabilité linéaire d'une couche mince de fluide sur un plan incliné, recouverte par un surfactant insoluble et soumise à des oscillations périodiques verticales a été étudiée pour une gamme des valeurs d'amplitude des vibrations. Nos résultats ont concerné l'évolution du taux de croissance en fonction du nombre d'onde pour differentes valeurs d'amplitude avec ou sans surfactant. Le cas sans surfactant, $Ma = 0$, nous a permis de valider les resultats numériques obtenus par Woods et Lin [4], où on montre que la vibration réduit l'instabilité du fluide en absence de surfactant.Dans le cas avec surfactant, $Ma = 1$, nous avons montré que le surfactant produit un effet stabilisant et que cet effet fait l'apparition de deux modes, mode de Marangoni et mode de surface(mode de Yih).

Références

[1] T. B. Benjamin,*Wave formation in laminar flow down an inclined plane*,J. Fluid Mech. **2**(1957)554-573.

[2] C. S. Yih,*Stability of Liquid Flow down an Inclined Plane*, Phys. Fluids **6**(3)(1963)321-334.

[3] T. B. Benjamin,F. Ursell,*The stability of a plane free surface of a liquid in vertical periodic motion*, P. Roy. Soc. Lond. A **225**(1954)505-15.

[4] D. R. Woods, S. P. Lin,*Instability of a liquid film flow over a vibrating inclined plane*, J. Fluid Mech **294**(1995)391-407.

[5] M. G. Blyth and C. Pozrikidis,*Effect of surfactant on the stability of film flow down an inclined plane*, J. Fluid Mech **521** (2004a)241-250

[6] P. Gao, X. Y. Lu,*Instability of an Oscillatory Fluid Layer With Insoluble Surfactants*, jfm **595**(2008)461-490

[7] L. N. Trefethen, Spectral Methods Matlab, SIAM(2000).

[8] S. Orszag, *Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation*, J. Fluid Mech. **50**(1971)689.

[9] A. H. Nayfeh, D. Mook,*Nonlinear Oscillation*, Wiley, New York, (1979)276-296.