

INSTABILITÉS INTERFACIALES NON VISQUEUSES D'UN SYSTEME A DEUX COUCHES FLUIDES NON MISCIBLES SATURANT UN MILIEU POREUX EN OSCILLATION PERIODIQUE HORIZONTALE

J. BOUCHGL^{1,2}, S. ANISS³, M. SOUHAR⁴, A. HIFDI³

¹ Institut Supérieur des Pêches Maritimes Agadir, Agadir, Maroc

² Université Ibn Zohr, ENSA, Laboratoire Génie de l'Energie, Matériaux et Systèmes (LGEMS), Agadir, Maroc

³ Université Hassan II, Faculté des sciences Ain Chock, Laboratoire de Mécanique, Km 8 route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc

⁴ Lemta-UMR CNRS 7563-Ensem, 2 avenue de la Forêt de Haye, BP 160, Vandœuvre-lès-Nancy 54504, France

Résumé

Dans le présent travail, nous nous intéressons aux effets des oscillations périodiques et horizontales sur l'instabilité interfaciale de deux couches fluides Newtoniennes, visqueuses, non miscibles et saturant un milieu poreux. Nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire non visqueuse de la solution de base, où l'on a réduit le problème à un oscillateur paramétrique qui décrit l'évolution de l'amplitude de l'interface supposée plane à l'équilibre. Nous avons montré l'existence de deux types d'instabilité : L'instabilité de Kelvin-Helmholtz et l'instabilité paramétrique. Les effets de la porosité, du nombre de Darcy, sur le déclenchement des instabilités à l'interface, sont ainsi examinés.

Mots clefs: Milieu poreux, Instabilité de Kelvin Helmholtz, Instabilité paramétrique

1. Introduction

L'étude de stabilité de l'interface séparant deux couches fluides incompressibles, non miscibles saturant un milieu poreux a fait l'objet d'une littérature abondante [1-3]. Ces études ont été menées pour examiner l'effet de la porosité et de la perméabilité ainsi que les propriétés physiques des deux fluides sur l'instabilité de Kelvin Helmholtz qui se déclenche à l'interface. Dans ce contexte, Raghven et al. [1] ont effectué une analyse de stabilité linéaire de l'interface en se basant sur la loi de Darcy pour déterminer l'équation qui correspond au taux de croissance. Ils ont montré que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz n'est possible que dans la situation potentiellement stable. Ensuite, Bau [2] a étudié le cas de deux couches fluides en mouvement relatif en considérant deux modèles : le premier modèle s'est basé sur la loi de Darcy et le deuxième sur l'équation de Forchheimer. Il a montré, que dans les deux cas, l'instabilité se déclenche si les vitesses des fluides dépassent un certain seuil. Plus tard, Asthana et al. [3] ont utilisé le modèle de Darcy et la théorie potentielle pour montrer que la porosité a un effet stabilisant sur la valeur critique de la vitesse des deux fluides. Par la suite, à la différence des travaux cités ci-dessus, Bouchgl et al. [4] ont considéré le cas de deux couches fluides visqueuses confinées dans une cellule de Hele-Shaw verticale en oscillation sinusoïdale horizontale. Ils ont discuté les conditions dans lesquelles l'analogie existe entre une cellule de Hele-Shaw et un milieu poreux décrit par le modèle de Darcy. Ils ont justifié cette analogie pour simuler l'instabilité interfaciale en milieu poreux par la détermination des conditions dans lesquelles l'état de base, calculé à partir des équations de conservation en cellule de Hele-Shaw, est identique à celui calculé à partir du modèle de Darcy. Par la suite, ils ont montré que cette analogie existe pour les basses fréquences dimensionnelles

d'oscillations et lorsque la perméabilité du milieu poreux est définie par $\kappa_1 = \frac{e^2}{12}$, où e est l'épaisseur de la cellule.

Dans cette investigation, nous présentons une formulation mathématique du problème de la stabilité d'une interface entre deux couches fluides visqueuses et non miscibles saturant un milieu poreux et soumises à des oscillations périodiques et horizontales. Nous effectuons une analyse de stabilité linéaire pour chercher la relation de dispersion. L'objet de cette étude, qui est une extension des travaux précédents [4-5], est d'examiner l'effet des oscillations périodiques horizontales ainsi que les propriétés physiques du milieu poreux sur la stabilité de l'interface.

2. Formulation du problème

Considérons deux couches fluides Newtoniennes, incompressibles, non miscibles, de viscosités dynamiques, μ_1 et μ_2 , de densités, ρ_1 et ρ_2 , saturant un milieu poreux d'extension infinie dans les directions horizontales et de hauteur $h = h_1 + h_2$ (voir Fig. 1).

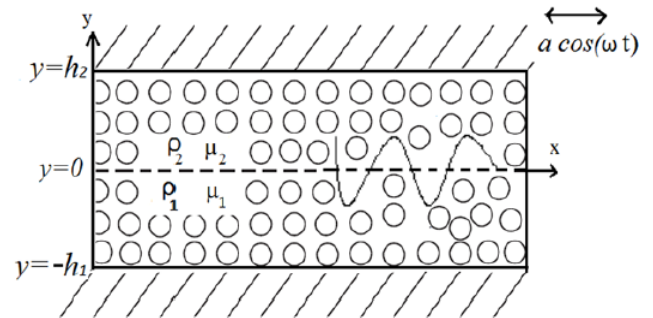


Figure 1: Couches fluides non miscibles saturant un milieu poreux soumis à des oscillations périodiques et horizontales.

Les deux couches fluides sont soumises à un mouvement oscillant de la forme $a \cos(\omega t) \mathbf{x}$, avec, a , l'amplitude, ω la fréquence angulaire de l'oscillation. Nous notons par p_j la pression et par $\mathbf{V}_{\text{fluide}j}$, où $j=1$ ou 2 selon le fluide considéré, la vitesse relative du fluide liée à la vitesse de Darcy par la relation : $\mathbf{V}_{\text{fluide}j} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{V}_j$. En supposons la validité de la formulation de Darcy, les équations de conservation s'écrivent :

$$\nabla \mathbf{V}_j = 0 \quad j=1,2 \quad (1)$$

$$\frac{\rho_j}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{V}_j \cdot \nabla) \mathbf{V}_j \right] = -\nabla p_j - \frac{\mu_j}{k_1} \mathbf{V}_j + a\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{x} + \rho_j \mathbf{g} \quad (2)$$

où ε est la porosité du milieu et k_1 sa perméabilité.

2.1 ETAT D'EQUILIBRE

A l'équilibre, l'interface séparant les deux fluides est supposée plane et l'état de base est instationnaire. Soit donc, $\mathbf{V}_j^b = (U_j^b, 0, 0)$, la solution de base qui satisfait nécessairement l'équation de continuité et le modèle de Darcy ainsi que les conditions aux limites au niveau des parois verticales en $x = 0, L$. Les équations de l'état de base s'écrivent :

$$\frac{\rho_j}{\varepsilon} \frac{\partial U_j^b}{\partial t} = -\frac{\partial P_j^b}{\partial x} - \frac{\mu_j}{k_1} U_j^b + \rho_j a \omega^2 \cos(\omega t) \quad (3)$$

$$0 = -\frac{\partial P_j^b}{\partial y} - \rho_j g \quad (4)$$

Les parois verticales, en $x = 0, L$, génèrent un écoulement au sein du milieu poreux et le volume déplacé des deux fluides vérifie la condition suivante :

$$\int_{-h_1}^0 \mathbf{V}_1^b \cdot \mathbf{x} \, dy = - \int_0^{h_2} \mathbf{V}_2^b \cdot \mathbf{x} \, dy \quad (5)$$

Cette condition nous permet d'écrire $U_1^b(t) = -\frac{h_2}{h_1} U_2^b(t)$

Le système d'équations (3) et (5) admet une solution de base sous la forme :

$$U_j^b(t) = F_j \cos(\omega t) + G_j \sin(\omega t) \quad (6)$$

F_j et G_j sont des fonctions déterminées à partir de l'équation (3) en utilisant la condition (5)

$$F_1 = -HF_2 = \frac{a \omega \varepsilon^2 H (\rho - 1)}{\Gamma \text{Da} (\rho H + 1) \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{\text{Da}^2} \frac{1}{\Gamma^2} \right]} \quad (7)$$

$$G_1 = -HG_2 = \frac{a \omega \varepsilon^2 H (\rho - 1)}{(\rho H + 1) \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{\text{Da}^2} \frac{1}{\Gamma^2} \right]} \quad (8)$$

Avec $\text{Da} = \frac{k_1}{h^2}$ est le nombre de Darcy, $\Gamma = \sigma_2 \frac{(\rho H + 1)}{(\mu H + 1)}$ où

les paramètres $\sigma_2 = \frac{\omega h^2}{v_2}$ est le nombre de fréquence,

$H = \frac{h_2}{h_1}$ est le rapport des hauteurs des deux couches

fluides, $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ le rapport des masses volumiques et

$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ le rapport des viscosités dynamiques, qui peut être

exprimé en fonction de contraste de viscosité A_μ ,

$\mu = \frac{1 - A_\mu}{1 + A_\mu}$, où $A_\mu = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$ est le contraste de viscosité qui

vérifie $-1 \leq A_\mu \leq 1$. Remarquons que dans un milieu non poreux, $\varepsilon = 1$ et $\text{Da} \rightarrow \infty$ dans le cas limite correspondant à $\Gamma \rightarrow \infty$, la solution de base donnée par l'équation (6) converge vers celle obtenue par Khennar et al [5]. Dans le cas des basses fréquences, cette solution tend vers la solution de base déterminée dans [4] si et seulement si

$$k_1 = \frac{e^2}{12}.$$

D'après l'équation (4), la pression de base est donné par :

$$P_j^b(t) = -\rho_j g y + C_j \quad (9)$$

où C_j sont des constantes arbitraires.

2.2 STABILITE LINEAIRE PARFAITE DE LA SOLUTION DE BASE

Le système d'équations de conservation correspondant à l'étude de stabilité linéaire de l'état d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\rho_j}{\varepsilon} \left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{U_j^b}{\varepsilon} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p_j}{\partial x} - \frac{\mu_j}{k_1} u_j \quad (11)$$

$$\frac{\rho_j}{\varepsilon} \left[\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{U_j^b}{\varepsilon} \frac{\partial v_j}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p_j}{\partial y} - \frac{\mu_j}{k_1} v_j \quad (12)$$

Nous cherchons ensuite les solutions du problème en modes normaux :

$$(p_j, u_j, v_j, \xi)(x, y, t) = (\tilde{p}_j(y, t), \tilde{u}_j(y, t), \tilde{v}_j(y, t), \tilde{\xi}(t)) \exp(ikx)$$

où k est le nombre d'onde et $i^2 = -1$. Le système (10)-(12) est associé aux conditions aux limites suivantes :

- Conditions aux limites de glissement :

$$v_1 = 0 \text{ en } y = -h_1 \text{ et } v_2 = 0 \text{ en } y = h_2 \quad (13)$$

- Condition cinématique linéaire à l'interface :

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{\xi}(t)}{\partial t} + ik U_j^b \tilde{\xi}(t) = \tilde{u}_j \quad (14)$$

- Continuité des contraintes normales à l'interface :

$$(p_1^b + p_1) - (p_2^b + p_2) - \left(2\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - 2\mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} \text{ en } y = 0 \quad (15)$$

où \mathbf{n} est la normale à l'interface et γ est la tension

superficielle avec $\gamma \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial^2 \xi(t)}{\partial x^2}$. La pression totale est

développée au premier ordre au voisinage de $y = 0$:

$$(p_j^b + \tilde{p}_j) = P_j^b(0) + \frac{\partial P_j^b}{\partial y} \Big|_{y=0} \xi(t) + p_j(y) \quad (17)$$

où k est le nombre d'onde. Le système (10)-(12) associé aux conditions aux limites (13)-(15), permettent d'obtenir l'expression de la relation de dispersion sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{d^2 \tilde{\xi}(t)}{dt^2} + [\alpha_1 + \alpha_2 \cos^2(t) + \alpha_3 \sin^2(t) + \alpha_4 \sin(2t) + i\alpha_5 \cos(t) + i\alpha_6 \sin(t)] \tilde{\xi}(t) = 0 \quad (18)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ et α_6 sont des coefficients en fonction de la vitesse de base, du nombre de Weber $We = \frac{\rho_2 h^3 \omega^2}{\gamma}$, de l'amplitude adimensionnelle des

oscillations $A = \frac{a}{h}$, du nombre d'onde adimensionnel

$n = kh$, du rapport des viscosités cinématiques $v = \frac{v_1}{v_2}$ et

de $Go = \frac{g}{h\omega^2}$. Par la suite, nous déterminons les courbes de

stabilité marginale, amplitude des oscillations A en fonction du nombre d'onde n , en fixant les autres paramètres. Nous

nous sommes basés dans cette étude sur des méthodes spectrales pour résoudre numériquement le problème. Nous proposons l'utilisation de la matrice de différenciation de Fourier [6] au lieu des méthodes classiques basées sur le calcul des déterminants de Hill. Dans cette situation, l'équation de dispersion (18) mène à une formulation matricielle qui correspond à un problème aux valeurs propres non linéaire. De plus, les résultats numériques de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz sont comparés avec le critère analytique de cette instabilité, [5], obtenu en éliminant la partie instationnaire de l'équation (18) et qui est donné par: $A \geq \sqrt{-2\alpha_1 / \alpha_2 + \alpha_3}$.

3 Résultats et discussion

L'évolution de l'amplitude des oscillations, A , en fonction du nombre d'onde, n , est présentée sur les figures 2 et 3 pour des valeurs de porosité, respectivement, $\varepsilon=0.3$ et $\varepsilon=0.6$, et pour des valeurs de $Da=0.01$, $\sigma_2 = 20$, $A_\mu = 0.5$, $\rho = 2$, $We=6.25$, $Go=0.16$, $H_1 = H_2 = 1$.

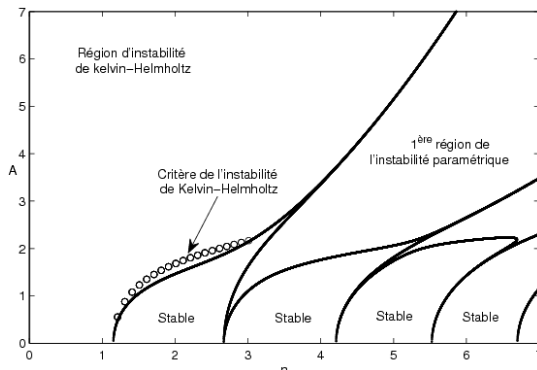


Fig 2 Diagramme de stabilité marginale, $A(n)$, pour $\varepsilon=0.3$ et $Da=0.01$

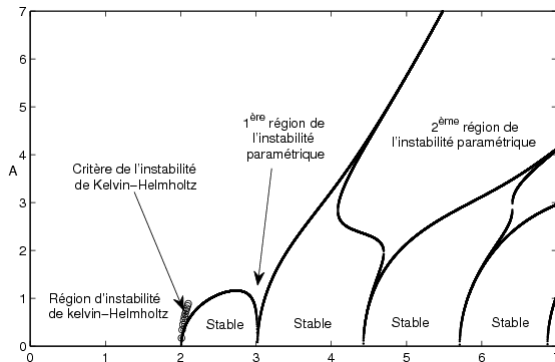


Fig 3 Diagramme de stabilité marginale, $A(n)$, pour $\varepsilon=0.6$ et $Da=0.01$

Ces figures montrent que l'interface est instable linéairement et l'instabilité est soit une instabilité de type Kelvin-Helmholtz, soit une instabilité paramétrique. Nous remarquons que l'augmentation de la porosité, ε , fait décaler les régions des deux types d'instabilités vers de grands nombres d'onde. Par exemple, la courbe qui délimite la zone de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz commence en $n = 1.161$ pour $\varepsilon = 0.3$ et en $n = 2.011$ pour $\varepsilon = 0.6$. Quant à la première région d'instabilité paramétrique, elle est centrée en $n = 2.671$ et en $n = 3.021$, respectivement, pour les valeurs de porosité $\varepsilon = 0.3$ et $\varepsilon = 0.6$. Les régions des résonances s'élargissent et se déplacent vers de grands nombres d'onde.

Dans le but de déterminer l'effet du nombre de Darcy sur la stabilité du système, les figures 3 et 5 illustrent les diagrammes de stabilité marginale pour $Da=0.01$ et $=0.001$

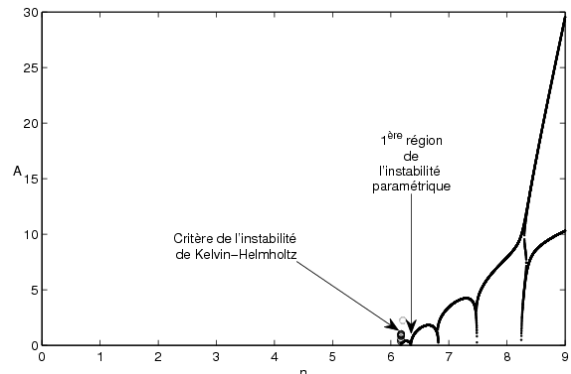


Fig 4 Diagramme de stabilité marginale, $A(n)$, pour $\varepsilon=0.3$ et $Da=0.001$

Respectivement. Nous constatons que lorsque le nombre de Darcy, Da , diminue de $Da=0.01$ à $Da=0.001$ (Fig 2 et 4), les zones de résonance paramétriques, qui sont dues aux oscillations périodiques, se déplacent vers les longueurs d'onde finies. Pour $Da=0.01$ la première résonance a lieu pour $n=1.201$.

Nous remarquons aussi que la zone de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est plus importante dans le cas où $Da=0.01$. Sur la Fig 4 la zone de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz a tendance à disparaître. Donc, la diminution de Da , fait supprimer l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, ce qui est montré clairement par le critère analytique sur les figures.

4 CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons mené une étude sur l'instabilité d'une interface entre deux couches fluides visqueuses, incompressibles, non miscibles et saturant un milieu poreux soumis à des vibrations périodiques et horizontales. L'étude de stabilité linéaire parfaite de la solution de base mène à un problème perturbé réduit à un oscillateur paramétrique.

Nous avons montré que le nombre de Darcy, Da , et la porosité, ε , tendent à supprimer l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans le cas de faibles rapports de densité et les instabilités paramétriques se déplacent vers les grands nombres d'onde.

Références

- [1] R. Raghven, S.S. Marseden, A theoretical study of the instability in the parallel flow of immiscible liquids in a porous medium, *Quart.J. Mech. Appl. Math.* 26 (1973), pp. 205-216
- [2] H.H. Bau, Kelvin-Helmholtz instability parallel flow in porous media : A linear theory *Phys. Fluids.* 25 (1982), pp. 1719-1722
- [3] R. Asthana, M.K. Awasthi, G.S. Agrawal, Kelvin-Helmholtz instability of two viscous fluids in porous medium, *Int J. of Appl. Math. and Mech.* 8 (2012), pp. 1-13
- [4] J. Bouchgl, S. Aniss, M. Souhar, Interfacial instability of two superimposed immiscible viscous fluids in a vertical Hele-Shaw cell under periodic oscillations, *Phys. Rev. E* 88, 023027 (2013).
- [5] M.V. Khennar, D.V. Lyubimov, T.S. Belozeroва, B. Roux, Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system, *J.Fluid Mech* 18 (1999), pp. 1085-1101
- [6] L. N. Trefethen, *Spectral methods in Matlab*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2000).