

Couplage d'une méthode sans maillage et d'une méthode de réduction de modèle pour des problèmes transitoires

K. Kpogan^{†*}, A. Tri[†], A. Sogah^{†*}, N. Mathieu^{†*}, H. Zahrouni^{†*}, M. Potier-ferry^{†*}

[†] Laboratoire de Mécanique, FSAC Université Hassan II, Casablanca

Institut Supérieur des Etudes Maritimes de Casablanca, Maroc {jaliltri@yahoo.fr}

^{†*} Laboratoire LEM3, CNRS UMR 7239, Université de Lorraine Metz, France

{amen-amevi.sogah, kekele.kpogan, norman.mathieu, hamid.zahrouni, michel.potier-ferry}@univ-lorraine.fr

Résumé: On propose dans ce travail un algorithme associant la méthode des solutions fondamentales (MFS) et la méthode de décomposition propre généralisée (PGD) pour résoudre l'équation de la chaleur en régime transitoire. La méthode PGD, moyennant une séparation de variables, permet de décomposer le problème original en un problème en temps résolu par la méthode classique de Runge-Kutta et un autre en espace approché par la méthode sans maillage MFS.

Mots clés

Décomposition Propre Généralisée (PGD), Méthode sans maillage, Méthode des Solutions Fondamentales (MFS), Problème transitoire de la chaleur.

1. Introduction

Dans ce travail, on propose de résoudre l'équation de la chaleur en régime instationnaire en combinant la méthode sans maillage MFS avec la méthode PGD. Cette dernière, moyennant une séparation entre le temps et l'espace, permet de réécrire l'équation originale en deux problèmes couplés l'un en temps et l'autre en espace. La résolution se fait en premier lieu avec une approximation de l'espace par la méthode MFS sachant que la fonction en temps est supposée connue. L'équation différentielle en temps est ensuite résolue par une méthode classique de Runge-Kutta. La méthode PGD appartient aux méthodes de réduction de modèles permettant de réduire la dimensionnalité du problème physique étudié. Chinesta et al. [3] ont largement contribué au développement de cette technique dans divers domaines scientifiques. Dans une récente référence, Bonithon et al. [1] ont couplé la PGD et la méthode BEM (Boundary Element Method) pour résoudre l'équation transitoire de la chaleur. La différence avec la présente étude réside essentiellement dans l'utilisation de la méthode MFS. On utilise aussi la forme forte des équations bien appropriée au contexte de la méthode MFS. Après une introduction, on présente la formulation du problème de la chaleur instationnaire ainsi que le principe de la méthode PGD suivi d'une courte description de la méthode MFS. Enfin, au travers d'exemples numériques, nous montrons l'efficacité de l'algorithme proposé.

2. Formulation du problème et la méthode PGD

On considère le problème transitoire de la chaleur dans $\Omega \times \tau$ avec les conditions aux limites dans Ω et les conditions initiales sur $\delta\Omega \times \tau$ suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - k\Delta u(x,y,t) = f(x,y,t) \\ u(x,y,t_0) = g(x,y) \\ u(x,y,t) = h(x,y,t) \end{cases} \quad (1)$$

avec Ω un domaine dans \mathbb{R}^2 , $\delta\Omega$ sa frontière, $\tau = [t_0, t_{max}]$ l'intervalle de temps, u le champ de température, k le coefficient de conductivité thermique et f, g et h sont des fonctions données.

Dans le cadre de la méthode PGD, la solution du problème (1) est recherchée sous forme d'une somme de couples, constitués du produit d'une fonction spatiale ϕ_i et d'une fonction temporelle T_i , c'est à dire:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &\approx u_n = \sum_{i=1}^p \phi_i(x,y)T_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i(x,y)T_i(t) + \phi_p(x,y)T_p(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Connaissant les $p-1$ premiers couples, nous allons décrire l'algorithme permettant de déterminer les fonctions ϕ_p et T_p . Pour simplifier l'écriture, on réécrit $\{\phi_p, T_p\} = \{\phi, T\}$ et on introduit la fonction poids supposée égale à $u^* = \phi T^* + \phi^* T$. L'équation (1) est alors décomposée en deux équations, l'une pour chercher la fonction d'espace $\phi(x,y)$ et l'autre permet de déterminer le champ en temps $T(t)$. En effet, la stratégie pour calculer le couple $\{\phi, T\}$ se fait en deux étapes. Premièrement, on considère que T est connue et on détermine ϕ en résolvant le système suivant:

$$\begin{cases} -k\alpha_t \Delta \phi(x,y) + \beta_t \phi(x,y) = \langle f(x,y,t), T(t) \rangle & \text{dans } \Omega \\ \quad + \sum_{i=1}^{p-1} \{k\alpha_t^i \Delta \phi_i(x,y) - \beta_t^i \phi_i(x,y)\} \\ \alpha_t \phi(x,y) = \langle h(x,y,t), T(t) \rangle - \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_t^i \phi_i(x,y) & \text{sur } \delta\Omega \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Où } \begin{cases} \alpha_t = \langle T(t), T(t) \rangle, \beta_t = \langle \frac{dT(t)}{dt}, T(t) \rangle \\ \alpha_t^i = \langle T_i(t), T(t) \rangle, \beta_t^i = \langle \frac{dT_i(t)}{dt}, T(t) \rangle, i = 1..p-1 \end{cases}$$

On note que $\langle \dots \rangle$ représente le produit scalaire. L'équation (3) est alors résolue par la méthode sans maillage MFS. Par ailleurs, d'autres techniques appropriées peuvent être utilisées. Deuxièmement, et une fois que la solution ϕ est connue, nous déterminons $T(t)$ en résolvant le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha_x \frac{dT(t)}{dt} - k\beta_x T(t) = \langle f(x,y,t), \phi(x,y) \rangle & \text{dans } \tau \\ \quad - \sum_{i=1}^{p-1} \left\{ \alpha_x^i \frac{dT_i(t)}{dt} + k\beta_x^i T_i(t) \right\} \\ \alpha_x T(t_0) = \langle g(x,y), \phi(x,y) \rangle - \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_x^i T_i(t_0) \end{cases} \quad (4)$$

Où

$$\begin{cases} \alpha_x = \langle \phi(x,y), \phi(x,y) \rangle, \beta_x = \langle \Delta \phi(x,y), \phi(x,y) \rangle, \\ \alpha_x^i = \langle \phi_i(x,y), \phi(x,y) \rangle, \beta_x^i = \langle \Delta \phi_i(x,y), \phi(x,y) \rangle, i = 1..p-1 \end{cases}$$

Le système (4) est résolu par la méthode de Runge-Kutta.

3. La méthode MFS

On propose de résoudre par MFS le problèmes (4) pris sous la forme simple suivante à chaque pas,

$$\begin{cases} \Delta\phi(x, y) + \gamma(x, y)\phi(x, y) = \mathcal{F}(x, y) & \text{dans } \Omega \\ \phi(x, y) = \mathcal{B}(x, y) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

Les fonctions \mathcal{F} et \mathcal{B} sont données. Le système (5) représente une EDP avec un opérateur différentiel à coefficients variables dont la solution fondamentale est rendue disponible grâce à la méthode des équations analogues (AEM). En effet, la solution de cette EDP combine simultanément la solution particulière et la solution homogène. Ceci permet d'écrire cette solution sous la forme suivante:

$$\phi(x, y)(x, y) \approx \tilde{\phi}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_d} a_i v(r_i) + \sum_{i=1}^{N_s} c_i G(\rho_i) \quad (6)$$

où N_d et N_s représentent respectivement les points d'interpolation à l'intérieur du domaine Ω et le nombre de points sur une frontière fictive Γ . $\{a_j\}_{j=1}^{N_d}$ et $\{c_j\}_{j=1}^{N_s}$ sont des inconnues à déterminer. Les fonctions $v(r_i)$ représentent les solutions particulières de l'opérateur de Laplace défini par,

$$\Delta(v(r_i)) = \varphi(r_i) \quad (7)$$

où les $\varphi(r_i)$ sont des fonctions de base radiale et $r_j = \|(x, y) - (x_j, y_j)\|$, $(x_j, y_j)_{j=1..N_d}$ sont des points de collocation dans le domaine. On note également que,

$$G(\rho_i) = -\frac{1}{2\pi} \log(\rho_i) \quad (8)$$

est la solution fondamentale de l'opérateur Laplace pour le problème 2D caractérisée par,

$$\Delta G(\rho) = 0 \quad (9)$$

Les $\rho_j = \|(x, y) - (x_{s_j}, y_{s_j})\|$, $(x_{s_j}, y_{s_j})_{j=1..N_s}$ représentent les points sources pris sur la frontière fictive Γ contenant le domaine Ω . En introduisant (6) dans (5-a), on a:

$$\sum_{i=1}^{N_d} a_i \Psi(r_i) + \sum_{i=1}^{N_s} c_i \theta(\rho_i) = \mathcal{F}(x, y) \quad (10)$$

Telle que

$$\Psi(r_i) = \varphi(r_i) + \gamma(x, y)v(r_i) \quad (11)$$

$$\theta(\rho_i) = \Delta G(\rho_i) + \gamma(x, y)G(\rho_i) = \gamma(x, y)G(\rho_i) \quad (12)$$

La condition aux limites (5-b) devient alors,

$$\sum_{i=1}^{N_d} a_i v(r_i) + \sum_{i=1}^{N_s} c_i G(\rho_i) = \mathcal{B}(x, y) \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (13)$$

Il est clair que $\Psi(r)$ et $\theta(\rho)$ sont connues. L'efficacité et la précision de l'interpolation dépend du choix des fonctions de base radiale φ . En effet, les interpolants de Fourier, les fonctions radiales polynomiales, les thin plate Splines (TPS) ainsi que les fonctions multi-quadratiques (MQ) peuvent être utilisés. Dans ce travail, les fonctions de bases radiales multi-quadratiques sont alors prises en compte :

$$\varphi(r) = \sqrt{c^2 + r^2} \quad (14)$$

d'où

$$v(r) = \frac{1}{9} (4c^2 + r^2) \sqrt{c^2 + r^2} - \frac{c^3}{3} \ln(c + \sqrt{c^2 + r^2}) \quad (15)$$

Le paramètre c est une constante choisie égale à 1. Pour la mise en œuvre de cette technique, nous choisissons N_d points intérieurs dans le domaine Ω , N_b points sur la frontière $\partial\Omega$ et N_s points source sur la frontière fictive Γ .

4. Exemple Numérique

Pour montrer l'efficacité de l'algorithme développé dans les sections précédentes, on résout l'équation de chaleur en régime transitoire pour un domaine carré. La convergence de la méthode PGD et celle de la MFS en fonction d'un certain nombre de paramètres est alors présentée. On étudie en particulier l'influence des paramètres R , N_s et N_d . On note que n_t représente le nombre de discrétisation en temps et $n_{\phi T}$ est le nombre d'enrichissement correspondant au nombre de couple $\{\phi, T\}$ nécessaire pour obtenir une bonne approximation de la solution. Pour s'assurer d'avoir une meilleure solution, on détermine les erreurs suivantes:

$$e_n = \frac{\|u_n - u_{exact}\|}{\|u_{exact}\|} \quad \text{et} \quad E_n = \frac{|u_n - u_{exact}|}{|u_{exact}|} \quad (16)$$

Dans ce test, on considère un domaine carré $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ avec des conditions initiales et aux limites homogènes et la fonction source $f(x, y, t)$ est égale 1. La solution exacte est donnée alors par:

$$u_{exact} = \int_0^{0.3} \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}(x, y, \bar{x}, \bar{y}, t - \bar{t}) d\bar{x} d\bar{y} d\bar{t} \quad (17)$$

Avec

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) \sin(i\pi \bar{x}) \sin(j\pi \bar{y}) \\ &\quad \times \exp(-\pi^2(i^2 + j^2)\xi) \end{aligned} \quad (18)$$

Nous avons calculé l'erreur e_n en fonction des différents paramètres de discrétisation MFS. Dans la figure 1, on présente l'erreur e_n en fonction du rayon de la frontière fictive R en fixant $N_d = 45$ pour $N_s = 12$ et $N_s = 30$. On constate qu'on a une bonne approximation de la solution à partir de $R = 2$ et se stabilise autour de 10^{-5} au delà de $R = 5$.

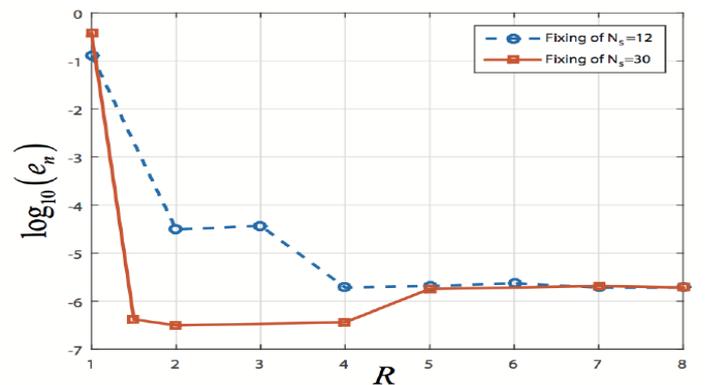


Figure 1. L'erreur e_n en fonction de R ($N_d = 45$)

La figure 2 montre qu'en fixant R et N_d , l'erreur diminue lorsque N_s augmente. De même, on remarque (figure 3) que

l'erreur e_n s'améliore en augmentant le nombre de point N_d et se stabilise autour de $N_d = 50$. Les calculs MFS sont donnés pour un nombre d'enrichissement $n_{\phi T} = 2$. Pour étudier l'influence de cet enrichissement, on a fixé les paramètres MFS et on a tracé sur la figure 4, l'erreur relative E_n pour différentes valeurs $n_{\phi T}$.

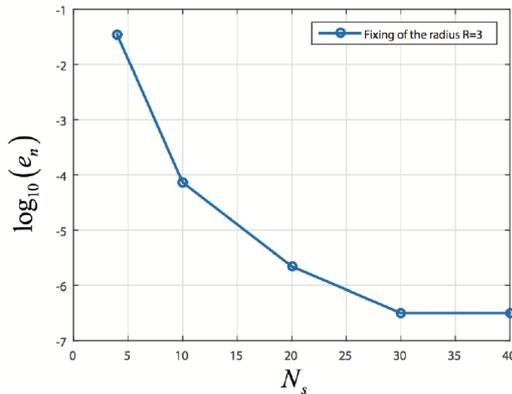


Figure 2. L'erreur e_n en fonction de N_s ($N_d = 45$)

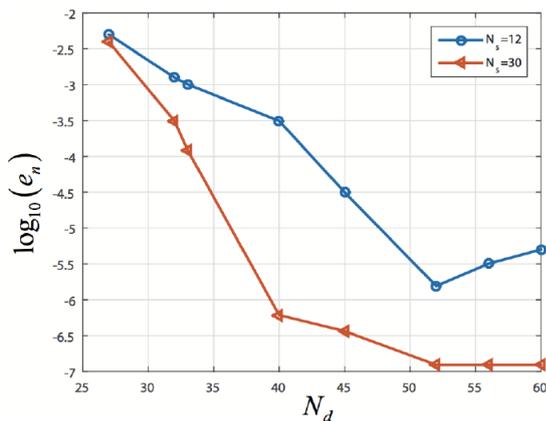


Figure 3. L'erreur e_n en fonction de N_d ($R = 3$)

On remarque, pour $t = 0.015$, que E_n est de l'ordre de 10^{-1} pour $n_{\phi T} = 1$, atteint 3.10^{-3} pour $n_{\phi T} = 2$ et se stabilise à 10^{-3} pour $n_{\phi T} = 8$. L'erreur PGD diminue lorsque $n_{\phi T}$ augmente. On conclut alors que l'erreur diminue lorsque les points de collocation N_d , les points source N_s et le nombre d'enrichissement $n_{\phi T}$ augmentent avant saturation.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé un algorithme combinant la méthode des solutions fondamentales et la technique de décomposition généralisée propre pour résoudre l'équation transitoire de la chaleur. A l'aide de la PGD, nous avons transformé le problème initial en deux problèmes, l'un en temps que nous avons résolu par la méthode de Runge-Kutta et l'autre dans l'espace résolu par MFS. Nous avons testé l'efficacité de l'algorithme proposé et nous avons analysé l'influence des différents paramètres de discrétisation de la MFS. Nous avons montré que seuls quelques termes d'enrichissement par la méthode PGD sont nécessaires pour obtenir une très bonne convergence de la solution. Les résultats obtenus sont alors en

bon accord avec ceux de la référence. Des travaux sont en cours pour étendre cette technique aux problèmes non linéaires en associant cette procédure avec la méthode asymptotique numérique.

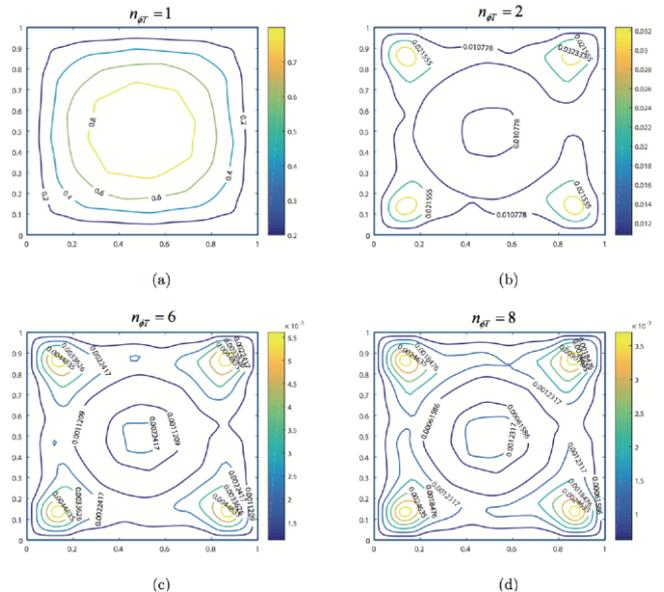


Figure 4. L'erreur E_n pour différents couples $\{\phi, T\}$ à l'instant $t = 1.5 \cdot 10^{-2}$, $n_t = 50$, $N_d = 30$, $N_s = 30$ et $R = 3$

(a) Un couple de fonction (b) Deux couples de fonction, (c) six couples de fonction (d) Huit couples de fonction

Références

- [1] G. Bonithon, P. Joyot, F. Chinesta, P. Villon, Non-incremental boundary element discretization of parabolic models based on the use of the proper generalized decompositions, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 (1) (2011) 2–17.
- [2] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto, Proper generalized decomposition of multi-scale models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (8-9) (2010) 1114–1132.
- [3] M. A. Golberg, C. Chen, A. Muleshkov, The method of fundamental solutions for time-dependant problems, *Boundary Element Technology XIII* (1999) 377–386.
- [4] J. A. Kołodziej, M. Mierzwiczak, Transient heat conduction by different versions of the MFS – a comparison study, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* 17 (2010) 75–88.
- [5] E. Mahajerin, G. Burgess, A Laplace transform-based fundamental collocation method for two dimensional transient heat flow, *Applied Thermal Engineering* 23 (1) (2003) 101–111.
- [6] A. Tri, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, High order continuation algorithm and meshless procedures to solve nonlinear poisson problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 36 (11) (2012) 1705–1714.
- [7] D. L. Young, C. C. Tsai, K. Murugesan, C. M. Fan, C. W. Chen, Time-dependent fundamental solutions for homogeneous diffusion problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 28 (12) (2004) 1463–1473.