

Hamid BENBIH, K. GUERAOU, S. MEN-LA-YAKHAF, M. DRIOUICH, M. TAIBI, M. BELCADI
 Team of modelling Faculty of sciences, Mohammed V University, Rabat B.P. 1014, Rabat, Morocco
 kgueraoui@yahoo.fr

RESUME

L'injection des polymères est une technique de fabrication de pièces ou objets encore mal maîtrisée sur le plan de la recherche. Cette technique doit cependant répondre à une demande industrielle de plus en plus pressante et exigeante. Il s'agit, dans le cas des thermoplastiques de fondre un polymère initialement sous forme de poudres ou de granulés dans une presse à injecter et de le forcer à s'écouler à l'état fondu dans un moule fixé sur la presse. Le polymère se refroidit alors en épousant la forme de l'empreinte. Les paramètres de base de la transformation sont : la température, la pression, la vitesse, le volume, et le temps. Le but essentiel de notre travail est la simulation des phénomènes thermomécaniques au cours de la phase de remplissage. Cette simulation permet de donner l'état de la matière pendant et à la fin de cette phase. La modélisation du remplissage consiste à résoudre numériquement les trois équations de continuité, quantité de mouvement et l'énergie. Cette résolution consiste à étudier l'échange thermique entre le polymère fondu (traité le cas d'un fluide incompressible) qui coule et le moule. Pour cela, on utilise la méthode numérique des différences finies pour résoudre les trois équations précédentes. Cette méthode de calcul numérique donne la température à chaque instant au cours de l'écoulement de la matière à partir de l'équation de la conservation de l'énergie ainsi que le profil de la vitesse à partir de l'équation de la quantité de mouvement. L'utilisation du modèle pseudoplastique thermo-dépendant de la viscosité qui tient compte de la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement et de la température nécessite d'établir un couplage des équations d'échange thermique et mécanique.

Mots clé : injection, polymère fondu, fluide compressible, conduite tronconique, modèle pseudoplastique thermo-dépendant, modélisation numérique, différences finies.

1. Formulation mathématique

On peut décrire le mouvement d'un fluide tel que le polymère par un ensemble d'équations aux dérivées partielles déduites des lois fondamentales de la mécanique et de la thermodynamique. C'est-à-dire les lois de conservation de la masse (équation de continuité), de la quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes), et de l'énergie (équation de l'énergie).

1.1 Equation de continuité

En coordonnées cylindrique et dans le cas compressible l'équation de continuité s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot w) = 0$$

1.2 Equation de quantité de mouvement

L'équation de la quantité de mouvement dans le cas d'un fluide compressible s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} \right) = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho \cdot \vec{f} + \overrightarrow{div}(\tau)$$

La projection de cette équation sur \vec{e}_r donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot w \cdot u) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \eta_a \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_a \frac{\partial u}{\partial z} \right) - 2\eta_a \frac{u}{r^2} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_a \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \rho f_r \end{aligned}$$

La projection de cette équation sur \vec{e}_z donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot w) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u \cdot w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot w^2) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \eta_a \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_a \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \eta_a \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_a \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \rho f_z \end{aligned}$$

1.3 Equation de l'énergie

L'équation d'énergie s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
c_v \frac{D(\rho \cdot T)}{Dt} &= -P \overrightarrow{div}(\vec{v}) + \text{div}(\lambda \overrightarrow{grad}(T)) \\
&+ 2\eta_a \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \\
&+ \eta_a \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + 2\eta_a \frac{u^2}{r^2} \\
&- \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \eta_a \cdot u \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_a \cdot u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
&- 2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_a \cdot w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \eta_a \cdot w \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\
&- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \eta_a \cdot w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
&- \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_a \cdot u \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right)
\end{aligned}$$

2. méthode de résolution

Pour résoudre un problème de la physique il faut distinguer le modèle physique du modèle mathématique. Le modèle physique peut s'exprimer en mots et phrases qu'il est nécessaire de traduire en expressions mathématiques. Lorsque le problème est ainsi bien posé, il est alors possible de le résoudre soit mathématiquement (solution analytique) ou numériquement (solution numérique).

Dans notre travail, nous avons opté à l'utilisation de la méthode des différences finies comme méthode de résolution, la méthode des différences finies est la méthode bien adaptée pour les problèmes des écoulements.

3. Résultats et interprétations

Dans cette partie, nous exposons les résultats de modélisation obtenus à l'aide du code « FORTRAN », en se basant sur le cas d'un polymère représenté par un fluide Non Newtonien (modèle Pseudo-plastique thermo-dépendant) et compressible en conduite tronconique.

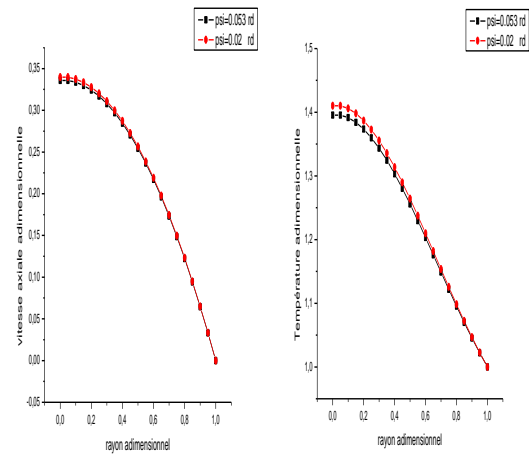


Figure 1 : profil de la vitesse axiale et de la température adimensionnelle en fonction de rayon en $z=L/4$ pour deux valeurs de l'angle au sommet du cône Ψ

La figure 1, montre l'évolution des profils des vitesses axiales et de la température pour deux valeurs de l'angle au sommet du cône Ψ , nous constatons qu'une diminution de Ψ entraîne une augmentation de la vitesse axiale et de la température. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que la diminution de ce paramètre conduit à l'augmentation du rayon de la conduite ce qui favorise donc l'écoulement du liquide visqueux dans la direction axiale.

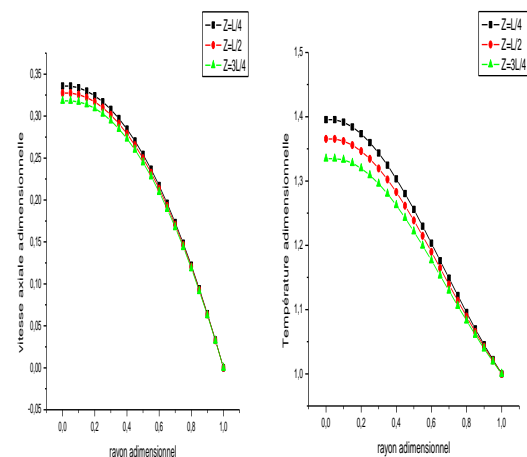


Figure 2 : Profil de la vitesse axiale et de la température adimensionnelle en fonction du rayon adimensionnel.

La figure 2, illustre bien l'évolution des profils des vitesses axiales et de la température, on note qu'au fur et à mesure que le polymère avance dans la conduite les amplitudes de la vitesse axiale adimensionnelle et de la température adimensionnelle diminuent. Ceci peut s'expliquer par le fait que le polymère devient plus visqueux et par conséquent augmentation des frottements entre les couches coaxiales du polymère, impliquant donc une diminution des amplitudes de la vitesse axiale et de la température.

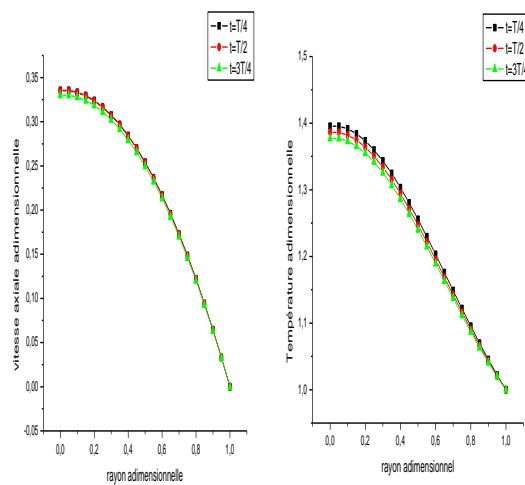


Figure 3 : Profil de la vitesse axiale et de la température adimensionnelle en fonction du rayon adimensionnel.

D'après la figure 3, On constate que lorsque le temps s'écoule la vitesse axiale et la température diminuent. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que proche de la paroi les atomes sont faiblement déplacés de leur position d'équilibre et que les mouvements moléculaires sont difficiles ce qui entraîne la diminution de la vitesse axiale adimensionnelle et de la température adimensionnelle.

4. Conclusion

La modélisation des phénomènes thermomécaniques a été basée sur les équations de la mécanique des milieux continus. L'utilisation des modèles pseudoplastiques thermo dépendants de la viscosité nécessite d'établir un couplage des équations d'échange thermique et les équations de la mécanique. La méthode des différences finies a été utilisée pour la résolution numérique des équations obtenues.

Références

- [1]. M.DRIOUICH «Modélisations Théorique et Numérique des Polymères Fondus en Conduites Cylindriques Déformables», thèse de doctorat université Mohamed 5 de Rabat (2012)
- [2] EL-TOURROUG, K., GUERAOU, K., HASSANAIN, N., MODHAFFAR, I., MEN-LA-YAKHAF, S. « Numerical and mathematical modeling of the injection for incompressible fluid through rigid cylindrical duct: Application of melted polymers PPH ». Advanced Studies in Theoretical Physics, Applied Mathematical Sciences, Vol. 8, 2014, no. 180, 8953 – 8964.
- [3] M. DRIUICH, K. GUERAOU, Y. HADDAD, A. EL HAMMOUMI, M. KERROUMAND O.F. FEHRI « Mathematical modeling of non permanent flows of molten polymer » IREME 4, pp. 689-694 2010.
- [4] M. TAIBI, R. CHAMMAMI, M. KERROUM, A. EL HAMMOUMI, G. ZEGGWAGH « Modélisation des écoulements pulsés à deux phases en conduites déformables ou rigides » ITBM RBM, 23, pp. 149-158, 2002.
- [5] M. TAIBI, R. CHAMMAMI, M. KERROUM, A. EL HAMMOUMI, G. ZEGGWAGH « Modélisation des écoulements pulsés à deux phases en conduites déformables ou rigides » ITBM RBM, 23, pp. 149-158, 2002.