Transformée de Radon discrète et résolution du problème de plarisation en élasticité

M. Boukour [1], A. El Omri[2]

1. Laboratoire de Mécanique et Génie civil . FST Tanger, mu.boukour@hotmail.com
2. Laboratoire de Mécanique et Génie civil . FST Tanger, abderrahim_elomri@yahoo.fr

Résumé :
Dans ce travail, on propose une nouvelle formulation de la solution du problème de polarisation en mécanique. Ce problème étant à la base de plusieurs problèmes en physique. La résolution est basée sur la transformée de Radon discrète (Gindikin, Gelfand et Graev [2]). On montre ici que cette transformée associée aux projecteurs de Hill, permet une résolution assez simple du problème de polarisation.
Une application au cas de l'élasticité hétérogène sera ensuite présentée et permettra d'obtenir l'équation intégrale relative à ce problème mais celle ci est formulée dans l'espace réel. L'intérêt de cette formulation réside dans le fait que la géométrie de la microstructure intervient de manière explicite.

Mots clés : *Homogénéisation, Transformée de Radon, Transformée de Radon discrète, Champ de polarisation, Projecteurs de Hill, Elasticité*

1 Introduction

Le problème de polarisation est un problème fondamental pour la résolution de plusieurs problèmes en mécanique et physique en général. En homogénéisation ce problème est très utile car il a permis la mise en place d'autres méthodes de résolution que celle des éléments finis telle que la méthode de Fourier. Cependant cette dernière ne permet pas une dépendance explicite de la microstructure. Franciosi a proposé [1] une technique basée sur la transformée de Radon et a pu établir une relation explicite entre la géométrie de la microstructure et le comportement homogénéisé. Cette démarche reste limitée aux milieux infinis.

On se propose de traiter ici le cas des milieux soumis à des hétérogénéités périodiques. Pour celà on fera appel à la transformée de Radon discrète proposée par Gindikin, Gelfand et Graev [2]. On montrera que celle ci associée aux projecteurs de Hill nous permettra de résoudre de manière simple et directe le problème de polarisation périodique et par suite nous permettra d'aborder celui de l'homogénéisation des milieux linéaires hétérogènes.

2 Transformée de Radon discrète de Gelfand-Gindikin-Graev

2.1 Transformée de Radon

Définition : Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à support compact , $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ et ρ un réel . On définit la transormée de Radon de f par :

$$\mathcal{R}^{\overrightarrow{n}} f(\rho) = \iint_{\mathbb{R}^2} \delta(\rho - \overrightarrow{x}.\overrightarrow{n}) f(\overrightarrow{x}) d\overrightarrow{x}. \qquad (1)$$

2.2 Transformée de Radon discrète (DRT)

Théorème : Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$ á support $[0,1]^2$.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{x} \in [0,1]^2$, on a :

$$f(\overrightarrow{x}) = f_0 + \sum_{\vec{n}\in\mathcal{N}} \overline{f}^{\vec{n}}(\vec{x}.\vec{n}). \qquad (2)$$

Où :

$$f_0 = \iint_{\mathbb{R}^2} f, \quad \texttt{et} \quad \widetilde{f} = f - f_0. \qquad (3)$$

$$\mathcal{N} = \{\vec{n} = \frac{(p,q)}{\sqrt{p^2+q^2}} / (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \quad \texttt{et} \quad p \wedge q = 1\} \qquad (4)$$

Et où $p \wedge q$ désigne le plus grand commun diviseur de p et q.

Pour tout $\vec{n} = \dfrac{(p,q)}{\sqrt{p^2+q^2}} \in \mathcal{N}$, on pose :

$$\overline{f}^{\vec{n}}(\vec{x}.\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}^{\vec{n}} \widetilde{f}(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{n} + \frac{m}{\sqrt{p^2+q^2}}). \qquad (5)$$

2.3 Propriétés :

Chaque composante $\overline{f}^{\vec{n}}$ de la DRT possède en plus des Propriétés classiques de la transformée de Radon (I.M. Gelfand, M.I. Graev,S.G. Gindikin [2]) les Propriétés importantes suivantes :

1. Soit $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(-q,p)$. Pour tout entier m et

tout réel t :

$$\overline{f}^{\vec{n}}(\vec{x}) = \overline{f}^{\vec{n}}(\vec{x} + m\frac{\overrightarrow{n}}{\sqrt{p^2+q^2}} + t\overrightarrow{T})$$

Autrement dit , la fonction $\overline{f}^{\vec{n}}$, est constante sur le géodisique $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + \mathbb{R}\overrightarrow{T} + \mathbb{Z}\frac{\overrightarrow{n}}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

2. **Orthogonalité**
   Pour tout $\vec{n}$, $\vec{n'} \in \mathcal{N}$, on a :

$$\overline{\overline{f}^{\vec{n}}}^{\vec{n'}} = \delta_{\vec{n},\vec{n'}}\overline{f}^{\vec{n}} \tag{6}$$

3 Les opérateurs interfaciaux de Hill

Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des tenseurs symétriques du second ordre. Les opérateurs interfaciaux ou projecteurs de Hill [3] pour une driection donnée $\vec{n}$, $\mathbf{A}_{\vec{n}}$ et $\mathbf{A}_{\vec{n}_\perp}$ sont donnés par :

$$\mathbf{A}_{\vec{n}}\ \mathbf{t} = \mathbf{t}.\mathbf{n} + \mathbf{n}.\mathbf{t} - \mathbf{n}.\mathbf{t}.\mathbf{n}; \qquad \mathbf{A}_{\vec{n}_\perp}\ \mathbf{t} = \mathbf{t} - \mathbf{A}_{\vec{n}}\ \mathbf{t}. \tag{7}$$

Avec $\mathbf{n} = \vec{n} \otimes \vec{n}$. Ces opérateurs vérifient les propriétés suivantes :

$$\mathbf{A}_{\vec{n}_\perp}\mathbf{A}_{\vec{n}_\perp} = \mathbf{A}_{\vec{n}_\perp} \tag{8}$$

$$\mathbf{A}_{\vec{n}}\ \mathbf{A}_{\vec{n}} = \mathbf{A}_{\vec{n}} \tag{9}$$

$$\mathbf{A}_{\vec{n}_\perp}\mathbf{A}_{\vec{n}} = \mathbf{A}_{\vec{n}}\ \mathbf{A}_{\vec{n}_\perp} = \mathbf{O}. \tag{10}$$

L'espace $\mathcal{S}$ peut alors être décomposé par :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\vec{n}} \bigoplus \mathcal{S}_{\vec{n}_\perp} \tag{11}$$

$$\mathcal{S}_{\vec{n}} = \{\mathbf{t} \in \mathcal{S}/\mathbf{t} = \mathbf{A}_{\vec{n}}\mathbf{t}\} \tag{12}$$

$$\mathcal{S}_{\vec{n}_\perp} = \{\mathbf{t} \in \mathcal{S}/\mathbf{t} = \mathbf{A}_{\vec{n}_\perp}\mathbf{t}\} \tag{13}$$

Ainsi tout élément $\mathbf{t}$ de $\mathcal{S}$ peut être écrit étant la somme de $\mathbf{t}_{\vec{n}_\perp} \in \mathcal{S}_{\vec{n}}$ et de $\mathbf{t}_{\vec{n}}$ de $\mathcal{S}_{\vec{n}}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\vec{n}} + \mathbf{t}_{\vec{n}_\perp} \tag{14}$$

Avec :

$$\mathbf{t}_{\vec{n}} = \mathbf{A}_{\vec{n}}\mathbf{t}\ , \qquad \mathbf{t}_{\vec{n}_\perp} = \mathbf{A}_{\vec{n}_\perp}\ \mathbf{t} \tag{15}$$

Considérons maintenant l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ défini par :

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{t} : \Omega \to \mathcal{S}/t_{i,j} = t_{j,i} \in L^2(\Omega)\,;\ \int_\Omega \mathbf{t}(\vec{x})d\Omega = 0\} \tag{16}$$

muni du produit scalaire :

$$< \mathbf{t}, \mathbf{t}' >= \sum_{i,j=1..3} \iint_\Omega t_{ij}t'_{ij} \tag{17}$$

En utilisant la décomposition de Hill et la transformée de Radon discrète, tout champs $\mathbf{t}(\overrightarrow{x})$ élément de $\mathcal{H}$ se décompose en

$$\mathbf{t}(\vec{x}) = \mathbf{t}_0 + \mathbf{t}^p(\vec{x}) + \mathbf{t}^a(\vec{x}) \tag{18}$$

Avec :

$$\mathbf{t}^p(\vec{x}) = \sum \overline{\mathbf{t}_{\vec{n}_\perp}}^{\vec{n}}(\vec{x}.\vec{n}); \qquad \mathbf{t}^a(\vec{x}) = \sum \overline{\mathbf{t}_{\vec{n}}}^{\vec{n}}(\vec{x}.\vec{n}). \tag{19}$$

Ceci nous permet de montrer le résultat fondamental suivant :

Pour tout $\vec{n} \in \mathcal{N}$ et $\mathbf{t} \in \mathcal{H}$:

$$div\ \overline{\mathbf{t}_{\vec{n}}}^{\vec{n}}(\vec{x}) = 0; \qquad rot\ rot(\overline{\mathbf{t}_{\vec{n}_\perp}}^{\vec{n}}(\vec{x})) = 0 \tag{20}$$

Par suite :

$$div\ \mathbf{t}^p(\vec{x}) = 0; \qquad rot\ rot\ \mathbf{t}^a(\vec{x}) = 0 \tag{21}$$

4 Problème de Polarisation en élasticité et utilistaion de La DRT :

On cherche le champs des contraintes σ et déformations ε d'un milieu élastique de rigidité C soumis à un champs de polarisation $\tau(\vec{x})$ et aux conditions aux limites satisfaisant :

$$\begin{cases} div\ \sigma(\vec{x}) = 0 \qquad \texttt{si,}\ \vec{x} \in \Omega = [0,1]^2 \\ \sigma(\vec{x}) = \mathbf{C}\varepsilon(\vec{x}) + \tau(\vec{x}). \\ < \varepsilon >= E. \end{cases} \tag{22}$$

On a d'après (20) et (21),

$$div\ \sigma(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{n} \in \mathcal{N} \quad \overline{\sigma}^{\vec{n}} = \overline{\sigma_{\vec{n}_\perp}}^{\vec{n}} \tag{23}$$

de même :

$$rot\ rot\ \varepsilon(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{n} \in \mathcal{N} \quad \overline{\varepsilon}^{\vec{n}} = \overline{\varepsilon_{\vec{n}}}^{\vec{n}} \tag{24}$$

Chaque projection de la loi de comportement selon une direction $\vec{n} \in \mathcal{N}$ donne :

$$\overline{\sigma}^{\vec{n}} = \mathbf{C}\overline{\varepsilon}^{\vec{n}} + \overline{\tau}^{\vec{n}} \tag{25}$$

En adoptant une écriture matricielle de la loi élastique avec :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{n,n} & \mathbf{C}_{n,n^\perp} \\ \mathbf{C}_{n^\perp,n} & \mathbf{C}_{n^\perp,n^\perp} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Nous avons pour toute direction $\vec{n} \in \mathcal{N}$:

$$\begin{pmatrix} \overline{\sigma_{\vec{n}}}^{\vec{n}} \\ \overline{\sigma_{\vec{n}_\perp}}^{\vec{n}} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_{\vec{n}}}^{\vec{n}} \\ \overline{\varepsilon_{\vec{n}_\perp}}^{\vec{n}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\tau_{\vec{n}}}^{\vec{n}} \\ \overline{\tau_{\vec{n}_\perp}}^{\vec{n}} \end{pmatrix} \quad (27)$$

En utilisant les relations (23) et (24)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\sigma_{\vec{n}_\perp}}^{\vec{n}} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_{\vec{n}}}^{\vec{n}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\tau_{\vec{n}}}^{\vec{n}} \\ \overline{\tau_{\vec{n}_\perp}}^{\vec{n}} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Sachant que

$$\tau(\vec{x}) = \tau_0 + \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}} \overline{\tau}^{\vec{n}}(\vec{x}.\vec{n}) \quad (29)$$

La solution du problème initial est alors obtenue par simple sommation

$$\varepsilon = E - \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}} \Gamma(n) \overline{\tau}^{\vec{n}} \quad (30)$$

où :

$$\Gamma(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {C_{\vec{n}\vec{n}}}^{-1} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Ds le cas de l'homogéneisation et par analogique avec ce qui précède :

$$\sigma = \mathbf{C}_0 \, \varepsilon + \delta\mathbf{C} \, \varepsilon \quad \texttt{Avec,} \quad \delta\mathbf{C} = \mathbf{C} - \mathbf{C}_0 \quad (32)$$

En remplacant τ par $\delta C\varepsilon$

$$\varepsilon = E - \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}} C_{nn}^{-1} \, \overline{\delta\mathbf{C}\varepsilon}^{\vec{n}}. \quad (33)$$

Ceci est l'homologue de l'expression classiquement connue sous le nom d'équation intégrale (Voir A. Khachaturyan [4] ,G.W. Milton [5] et T. Mura [6]) :

$$\varepsilon_{ij}(r) = E_{ij} + \frac{1}{2} \iint_\Omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (n_i \Omega_{jk} + n_j \Omega_{ik}) n_l \delta \widehat{C_{klpq} \varepsilon_{pq}} e^{ikr} \quad (34)$$

Où $\widehat{X}$ désigne la transformée de Fourier de X.

5 Conclusion :

La transformée de Radon discrète associée aux projecteurs de Hill aboutit à une nouvelle alternative pour résoudre le problème de polarisation en mécanique. La solution de ce problème est classique (24) mais formulée dans l'espace des phases . Cependant la solution obtenue par la présente méthode est écrite dans l'espace réel. Nous considérons que ceci permettrait de clarifier l'influence géométrique des hétérogénités sur le comportement macroscopique obtenu par homogénéisation. Néanmoins ; pour que cette méthode soit effective une discrétisation appropriée est souhaitable, pour le calcul des intégrales auxquelles à cette formulation fait appel.

Références

[1] P. Franciosi, G. Lormand, *Using the Radon Transform to Solve Inclusion Problems in Elasticity*, International Journal of Solids and Structures 41,(2004),585-606.

[2] I.M. Gelfand, M.I. Graev,S.G. Gindikin , *Selected Topic in Integral Geometry*, Americain Mathematical Society , Providence, 2000.

[3] R. Hill, *Interfacial Operators in The Mechanics of Composite Media*, J. Mech, Phys. Solids, Vol 31 ,No 4, (1983),1-4

[4] A.G. Khachaturyan, *Theory of Structural Transformation in Solids* ,Wiley, New York, 1983.

[5] G.W. Milton , *The Theory of Composites*, Cambridge University Press, 2004.

[6] T. MURA, *Micromechanics of Defects in Solids, Second edition*, Martinus Nijhof Publishers, 1987.