

# Conductivité thermique effective des structures périodiques fibreuses et transformée de Radon finie

A. El Mamouni<sup>1</sup>, A. El Omri<sup>2</sup>

1. Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, FST TANGER, anass.mamouni@gmail.com
2. Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, FST TANGER, abderahim\_elomri@yahoo.fr

## Résumé

Le but de ce travail est de proposer une formulation discrète de la solution du problème de polarisation périodique proposée par M. Boukour et A. EL Omri [12]. Ce formalisme est basé sur la transformée de Radon finie qui permet de décomposer le problème de polarisation en une somme de problèmes élémentaires « stratifiés ». On s'intéressera particulièrement ici à la détermination de la conductivité thermique d'un milieu hétérogène fibreux. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par la méthode basée sur la transformée de Fourier. Pour un contraste faible les deux méthodes sont comparables alors que pour des contrastes forts les résultats présentent une certaine différence.

**Mots clefs :** Homogénéisation Thermique- Transformée de Radon Discrète - Transformée de Radon Finie- Polarisation – Transformée de Fourier – Milieux périodiques

## 1. Introduction

Ce travail traite de l'homogénéisation des milieux périodiques à conductivité thermique hétérogène. Cette démarche est classiquement basée sur la solution du problème de polarisation T. Mura[9] et A. Khachaturyan[7] dans le cas des milieux infinis ou périodiques. Cette technique a été utilisée par J. Michel et als[4] en se basant comme ces prédécesseurs sur la décomposition en séries de Fourier (SF). Ce dernier a aussi proposé un algorithme itératif pour la résolution de ce problème. P. Franciosi et, G. Lormand [1] ont proposé de traiter ce problème pour un milieu infini en utilisant la transformée de Radon. Ceci a permis une analyse plus géométrique de l'effet de la forme de l'hétérogénéité sur le comportement effectif.

Pour traiter le cas périodique, M. Boukour et A. El Omri[12] proposent une formulation analytique de la solution du problème de polarisation en se basant sur la transformée de Radon discrète. Cependant cette formulation nécessite une discrétisation spatiale permettant le calcul des intégrales qu'elle implique. On propose dans ce travail l'utilisation de la transformée finie de Radon (TRF) utilisée en traitement d'images pour le calcul de ces intégrales. En adoptant la même démarche que celle proposée par J. Michel et als[4], on aboutit à un algorithme assez simple à implémenter pour la résolution du problème d'homogénéisation.

En vue de la vérification la méthode proposée, le cas de l'homogénéisation thermique d'un composite fibreux sera étudié. Une comparaison avec les résultats obtenus par la méthode proposée par J. Michel et als[4] permettra de mesurer la validité de cette nouvelle démarche.

## 2. Transformée de Radon discrète et solution du problème d'homogénéisation.

### 2.1 Position du problème

Considérons un milieu périodique hétérogène de conductivité thermique  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ . Le problème d'équilibre à résoudre sur une maille est :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{e}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \quad \langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{e}_o \quad (1)$$

Où  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}$  désignent respectivement le vecteur densité de courant et le champ électrique, le symbole  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'opérateur moyenne et le vecteur de polarisation  $\boldsymbol{\tau}$  est donné par

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}), \quad \delta \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{C} \quad (2)$$

Où  $\mathbf{C}$  est un tenseur conductivité de référence.

Les conditions aux limites imposent que  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  soient respectivement périodiques et anti-périodiques.

### 2.2 Solution continue par Transformée de Radon Discrète

En suivant la même démarche de M. Boukour et A. El Omri [12], le tenseur de polarisation peut être décomposé par la transformée de Radon Discrète

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_o + \sum \bar{\boldsymbol{\tau}}^n \quad (3)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^n(\rho) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \iint \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \rho k - m) d\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}_o$$

Avec  $\mathbf{n} = \frac{k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ ,  $k_1$  et  $k_2$  étant coprime

D'autre part  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^n$ , se décompose relativement à toute direction  $\mathbf{n}$  suivant

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^n = \bar{\boldsymbol{\tau}}_n^n + \bar{\boldsymbol{\tau}}_n^{\perp} \quad (4)$$

$$\text{Où } \bar{\boldsymbol{\tau}}_n^{\perp} = (\mathbb{I} - \mathbf{N}) \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^n \quad \text{et } \bar{\boldsymbol{\tau}}_n^n = \mathbf{N} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^n$$

et  $\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{N}^{\perp} = \mathbb{I} - \mathbf{N}$ ,  $\mathbb{I}$  tenseur unité.

De la même façon, le tenseur de conductivité se décompose sous la forme

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{n^{\perp}n^{\perp}} & \mathbf{C}_{n^{\perp}n} \\ \mathbf{C}_{nn^{\perp}} & \mathbf{C}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{nn} &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}, & \mathbf{C}_{n^+n^+} &= \mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}^+ \\ \mathbf{C}_{n^+n} &= \mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}, & \mathbf{C}_{nn^+} &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}^+ \end{aligned} \quad (5)$$

En utilisant le résultat fondamental obtenu par M. Boukour et A. EL Omri [12] formulé ici pour des champs vectoriels, on a

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{j} = \mathbf{j}_o + \sum_n \mathbf{j}_n^+ \quad (6)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e} = \mathbf{e}_o + \sum_n \mathbf{e}_n^+ \quad (7)$$

Où  $\mathbf{j}_o$  et  $\mathbf{e}_o$  sont les moyennes correspondantes. On en déduit des équations (1), (6) et (7) la solution du problème qui est de la forme:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_o - \sum_n \mathbf{C}_{nn}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{r}}_n^n \quad (8)$$

En tenant compte de (2) on a :

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_o - \sum_n \mathbf{C}_{nn}^{-1} \cdot \overline{(\delta \mathbf{C} \mathbf{e})}_n^n \quad (9)$$

Ce qui constitue l'équation intégrale à résoudre pour ce problème d'homogénéisation.

Par ailleurs, une autre technique d'homogénéisation est la méthode basée sur la transformée de Fourier. Celle-ci conduit à la solution classique G.W Milton [8]:

$$\Gamma_{im}(\mathbf{k}) = \frac{k_j k_l}{k_k C_{kl} k_l} \delta_{mj} \quad (10)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_o - \int \Gamma(\mathbf{k}) \cdot \overline{(\delta \mathbf{C} \mathbf{e})}(\mathbf{k}) \mathbf{e}^{l \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{e}^{-l \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

Ce qui constitue l'équation intégrale à résoudre pour obtenir la solution du problème (1).

### 3. Discrétisation et résolution basée sur la Transformée de Radon Finie

La solution obtenue par la méthode de Radon discrète et malgré sa simplicité nécessite une discrétisation pour le calcul d'intégrales qu'elle implique. En se basant sur les travaux relatifs au traitement d'image J.P Guédon[2] on peut montrer facilement que ces intégrales de Radon et dans le cas d'une discrétisation par voxel (pixel dans le cas bidimensionnel) correspondent exactement à la transformée finie de Radon finie (TRF) proposée initialement par Matus-Flusser[3] dans le cas bidimensionnel et pour une discrétisation (p x p) où p est un nombre premier. Ceci reste suffisant pour l'étude des structures fibreuses que l'on se propose d'étudier dans ce travail.

#### 3.1 Transformée de Radon Finie

Toute matrice carrée  $\mathbb{A}$  d'ordre p, ou p est premier peut se décomposer sous la forme

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_o + \sum_{m=0}^{p-1} \bar{\mathbb{A}}^m$$

$$\bar{\mathbb{A}}^m(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{A}([i+k]_p, [j+mk]_p) - \mathbb{A}_o(i, j), & 0 \leq m < p \\ \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{A}([i+k]_p, j) - \mathbb{A}_o(i, j), & m = p \end{cases}$$

Avec  $[x]_p$  désignant x modulo p.

L'équation intégrale discrétisée est ainsi mise sous la forme

$$\mathbf{e}(i, j) = \mathbf{e}_o(i, j) + \sum_n \mathbf{C}_{nn}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{r}}_n^n(i, j) \quad (12)$$

où (i, j) désignent les indices d'un pixel donné. Si le tenseur  $\mathbf{C}$  est donné dans le repère de la maille et ceci quelque soit son anisotropie,  $\mathbf{C}_{nn}$  s'obtient par (5) avec

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_n & \cos \theta_n \sin \theta_n & 0 \\ \cos \theta_n \sin \theta_n & \sin^2 \theta_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les angles  $\theta_n$  sont généralement reliées aux suites de Farey, M.Servières [11]

### 3.2 Algorithme de résolution itératif

En suivant la même démarche que celle proposée par J. Michel et als[4], on obtient un algorithme itératif simple d'implémentation. Cependant chaque composante de la transformée finie de Radon correspond à une direction donnée de l'espace. Ce calcul étant fait une seule fois et une fois la discrétisation en pixel de la microstructure étant réalisée et le choix de  $\mathbf{C}$  étant fixé.

A l'instar de la méthode de Fourier de J. Michel et als [4] l'état (i+1) est relié à l'état (i) par :

$$\mathbf{e}^{(i+1)} = \mathbf{e}_o - \sum_n \mathbf{C}_{nn}^{-1} \cdot \overline{(\delta \mathbf{C} \mathbf{e}^{(i)})}_n^n \quad (14)$$

L'état (0) sera pris défini par :  $\mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{e}_o$ . Les itérations se termineront une fois une condition de convergence sera satisfaite pour une précision  $\varepsilon$  donnée et pour toutes les directions  $\mathbf{n}$ :

$$\frac{\sum_{i,j} \|\bar{\mathbf{j}}_n^n(i, j)\|}{p^2 \|\mathbf{j}_o\|} < \varepsilon$$

où  $\|\mathbf{x}\|$  désigne la norme du vecteur  $\mathbf{x}$ .

### 4. Comparaisons et validation

Les comparaisons qu'on va présenter entre la méthode Fourier et celle présentée dans ce travail correspondent à un biphasé constitué de deux phases (a) et (b) isotropes de conductivités thermiques respectives  $C_a = \alpha C_b$  de fractions volumiques  $f_a$  et ( $f_b = 1 - f_a$ ).

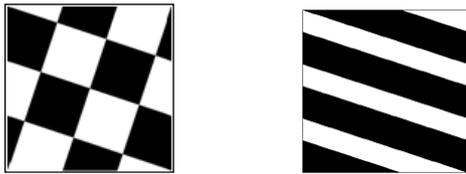


Fig 3. Structure échiquier (a) et structure stratifiée (b)

Pour une structure stratifié/inclinée (figure 3.b) la conductivité effective est connue analytiquement. Pour  $f_a = 0.6$ , les deux méthodes donnent des résultats exacts pour un contraste  $1 < \alpha < 10$ . Cependant pour  $\alpha = 50$  la méthode de Fourier présente une erreur de l'ordre de 1% alors que celle basée sur la transformé de Radon peut être considérée comme exacte.

Pour une structure échiquier droit et pour un contraste  $\alpha = 50$  l'erreur obtenue par la méthode de Fourier est de 5% alors que celle obtenue par la méthode de Radon est de l'ordre de 0.5 %. Il a été remarqué une augmentation de l'erreur avec le contraste. Pour un échiquier incliné et pour un contraste  $\alpha = 50$ , la présente méthode présente une erreur relative de 2,5% alors que celle de Fourier présente une erreur relative de 9,7%.

Les structures fibreuses, à fibre circulaires avec  $f_a = 0.6$ , quant à elles donnent les mêmes résultats pour des contrastes assez faibles. A titre de vérification, les mêmes résultats ont été obtenues pour des mailles différentes et ceci par les deux méthodes.

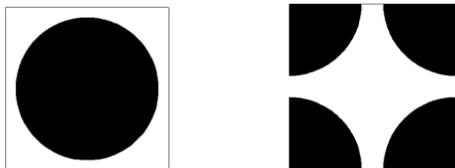


Fig4. Deux mailles d'une structure fibreuse cubique

Le tableau suivant regroupe l'ensemble des résultats obtenus pour deux contrastes plus élevés ( $\alpha = 20$  et  $\alpha = 50$ )

	$\alpha = 20$	$\alpha = 50$
Méthode basée sur SF	3,581	4,020
Méthode basée sur TRF	3,725	4,297

On remarque une différence significative entre les résultats obtenus par les deux méthodes. En plus cette différence augmente avec le contraste.

## Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail une nouvelle technique basée sur la Transformée de Radon Finie. Celle-ci est la discrétisation exacte de la formulation obtenue par M. Boukour et A. EL Omri [12]

Il a été montré numériquement que cette méthode et celle de Fourier donnent les mêmes résultats pour différentes géométries quand le contraste est faible. Cependant il a été remarqué que la méthode de Fourier ne donne pas des résultats exacts pour des structures dont les réponses sont connues analytiquement (Echiquier et stratifié incliné). Une différence significative a aussi été remarquée quand l'on augmente le contraste. Cette différence dépend aussi de la géométrie considérée.

Il ressort de ce travail que d'autres comparaisons avec des méthodes telles que celle des éléments finis est nécessaire pour mettre au clair ces différences.

## Références

- [1] P. Franciosi, G. Lormand, *Using the Radon Transform to Solve Inclusion Problems in Elasticity*, International Journal of Solids and Structures 41,(2004),585-606
- [2] J.P. Guédon, N. Normand, *Spline Mojette Transform Application in Tomography*, Ecole Polytechnique Nantes
- [3] F. Matus, J. Flusser, *Image Representations via Finite Radon Transform*, IEEE Transactions, Vol.15, NO 1, (1993),999-1000.
- [4] J. Michel, H. Moulinec, P. Suquet, *Effective Properties of Composite Materials with Periodic Microstructure :A Computational Approach*, Comput.. Appl. Mech. Engrg.172 (1999) 109-143.
- [5] Y.U. Wang & al, *Phase field Microelasticity theory*, Journal of Applied Physics (2002) 2.
- [6] I.M. Gelfand, S.G. Gindikin, *Selected Topics in Integral Geometry*, American Mathematical Society, Providence, 2003.
- [7] A.G. Khachatryan, *Theory of Structural Transformation in Solids*, Wiley, New York, 1983
- [8] G.W. Milton, *The Theory of Composites*, Cambridge University Press, 2004
- [9] T. MURA, *Micromechanics of Defects in Solids*, Second edition, Martinus Nijhoff Publishers, 1987
- [10] S. Nemat-Nasser M. Hori, *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Elsevier Science Publishers B.V, 1993
- [11] M. Servières, *Reconstruction Tomographique Mojette*, Université de Nantes, 2005.
- [12] M. Boukour, A. El Omri, *Transformée de Radon Discrète et Résolution du Problème de Polarisation en Elasticité*. Sism, Meknès, Maroc, 2017, 2-3.