

# Stabilité au flambement des plaques sandwiches en matériau à gradient de propriétés FGM

L. Hadji<sup>1,1</sup>, N. Zouatnia<sup>2</sup>, Y. Tlidji<sup>1</sup>, A. Kassoul<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Département de Génie Civil, Faculté des Sciences Appliquées, Université Ibn Khaldoun, BP 78 Zaaroura, Tiaret, Algérie.

<sup>2</sup>Laboratoire de Structures, Géotechnique et Risques, Université Hassiba Benbouali de Chlef, Algérie.

Résumé – Ce travail présente une étude de la stabilité des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriété type FGM avec un cœur rigide et homogène en utilisant une théorie raffinée des plaques RPT de quatre variables. La théorie présentée est de forme compatible et fortement similaire à la théorie classique des plaques dans plusieurs cotés, et donne lieu à des variations parabolique des contraintes de cisaillement transversale à travers l'épaisseur pour satisfaire les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieure et inférieure de la plaque. Les charges critiques de flambement sont trouvées par la résolution de problème aux valeurs propres.

**Mots clés-** Plaque ; Sandwich ; FGM, Solution de Navier ; Stabilité ;

## I. INTRODUCTION

Ce travail porte sur l'analyse de la stabilité au flambement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur les quatre cotés en matériaux à gradient de propriétés (FGM). La théorie des plaques raffinées de quatre variables est utilisée dans ce travail, La différence avec les autres théories, il y a seulement quatre fonctions inconnues, comparé aussi à cinq dans autres théories de cisaillement déformable. La théorie présentée est de forme compatible et fortement similaire à la théorie classique des plaques dans plusieurs cotés. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne lieu à des variations des contraintes de cisaillement transversales telles que le cisaillement transversal varie paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions de surface sans les contraintes. Les équations d'équilibres pour les plaques sandwichs en FGM sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuel. La solution analytique est obtenue en utilisant la méthode de Navier. Les charges critiques de flambement sont trouvées par la résolution un problème aux valeurs propres.

## II. THEORIE DES PLAQUES RAFFINEES POUR LES PLAQUES SANDWICHES A GRADIENT DE PROPRIETE

### A. A. Configuration géométrique

<sup>1</sup>Corresponding author

E-mail address: [had\\_laz@yahoo.fr](mailto:had_laz@yahoo.fr)

On considère le cas d'une plaque sandwich FGM, composée de trois couches hétérogènes voir la Figure.1. Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à  $z = \pm h/2$ .

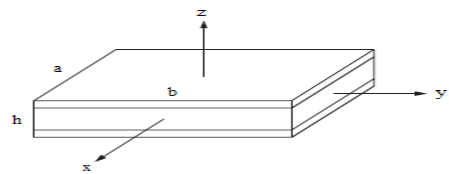


Fig. 1. Plaque sandwich rectangulaire en FGM.

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques, voir la Fig. 2, Les ordonnées verticales de ces couches de bas vers le haut de la plaque sandwich FGM, sont désignées par :  $h_1 = -h/2$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4 = h/2$ , respectivement.

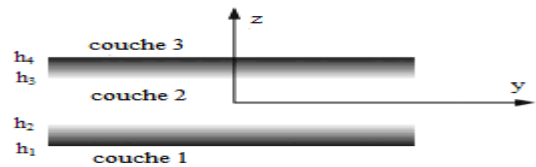


Fig. 2. La variation de corps le long de l'épaisseur de la plaque sandwich FGM.

### B. Propriétés des matériaux

Les propriétés du FGM varient continuellement due au changement gradué de la fraction volumique des matériaux constitutifs (céramique et métal), généralement dans le sens de l'épaisseur. La fonction de loi de puissance est couramment utilisée pour décrire ces variations des propriétés des matériaux.

La fraction volumique du FGM est supposé varient suivant l'épaisseur de la plaque selon une fonction simple en loi de puissance :

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k \quad z \in [h_1, h_2] \quad (1a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (1b)$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k \quad z \in [h_3, h_4] \quad (1c)$$

Où,  $V^{(n)}$ , ( $n=1,2,3$ ) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche  $n$ ;  $k$  est l'indice de puissance qui décrit le profil de variation des matériaux suivant l'épaisseur.

Les propriétés matérielles effectives, comme le module de Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$ , et la densité de masse  $\rho$ , peuvent être exprimée par une loi de mélange comme :

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)} \quad (2)$$

où  $P^{(n)}$  est la propriété matérielle effective du FGM de la couche  $n$ . Pour ce type de plaque,  $P_1$  et  $P_2$  sont les propriétés des faces supérieures et inférieures de la couche 1 respectivement et vice versa pour la couche 3 dépendant de la fraction volumique  $V^{(n)}$ , ( $n=1,2,3$ );

### C. Cinématique et Équations Constitutives

Le champ de déplacement utilisé dans cette étude est le suivant :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left( \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + z \left( \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ W(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Les déformations associées avec les déplacements dans l'équation (3) sont

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Où} \quad f = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2, \quad g = \frac{5}{4} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \quad (5)$$

### D. Équations d'équilibres

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}] dV \quad (6)$$

En intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque sandwich, l'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A [N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s + S_{yz}^s \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \gamma_{xz}^s] dx dy \quad (7)$$

Les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (10)$$

L'énergie de travail des forces extérieures de la plaque peut être écrite comme :

$$V = \int_S \bar{N} (w_b + w_s) dx dy \quad (11)$$

Avec

$$\bar{N} = \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right]$$

Les équations d'équilibres sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels :

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dx dy dz \\ & - \int_{\Omega} \bar{N} \delta W dx dy = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

En rassemblant les coefficients  $\delta u, \delta v, \delta w_b$  et  $\delta w_s$ , les équations d'équilibre pour la plaque sandwich FGM résultantes sont :

$$\begin{aligned} \delta u: \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v: \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b: \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} = 0 \\ \delta w_s: \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Équation (13) peuvent être exprimée en termes des déplacements  $(u, v, w_b, w_s)$  en remplaçant les forces résultantes de l'équation (8). Pour la plaque de FGM, les équations d'équilibre (13) prennent la forme :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \quad (14a)$$

$$- B_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \quad (14b)$$

$$- B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$+ B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$- D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$- D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \quad (14c)$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$+ (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}$$

$$- 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}$$

$$- 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}$$

$$+ A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \nabla^2 \ddot{w}_b \quad (14d)$$

### E. Solution de Navier pour une plaque sandwich sur appuis Simples

Pour une solution analytique des équations (14), la méthode de Navier est utilisée pour une plaque sandwich FGM avec des conditions de bords spécifiques (appuyée - appuyée). Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites sont développées en séries de Fourier comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Les équations, ci-dessous, des valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n, pour le problème de stabilité peut être écrite comme :

$$([K] - [N])\{\Delta\} = \{0\} \quad (16)$$

### III. RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSIONS

Pour la plaque FGM Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

Céramique (P<sub>1</sub>, Alumine, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) :  $E_c = 380GPa$ ,  $\nu = 0.3$ .

Métal (P<sub>2</sub>, Aluminium, Al) :  $E_m = 70GPa$ ,  $\nu = 0.3$ .

Le paramètre de fréquence naturelle adimensionnel est défini comme :

$$\bar{N} = \frac{N a^2}{100h^2 E_0} \quad (17)$$

La figure 3 montre les paramètres des charges critiques de flambement adimensionnel en fonction du rapport

épaisseur - côté des plaques sandwiches P - FGM simplement appuyées avec un cœur rigide et homogène.

Les résultats ont un maximum pour les plaques en céramique et un minimum pour les plaques en métal. On remarque que les résultats augmentent lentement lorsque la quantité de céramique augmente dans la plaque sandwich.

Les charges de flambement uniaxiale est le double de celui de la charge biaxiale quelle que soit la valeur de l'indice de puissance p et le type de la plaque FGM.

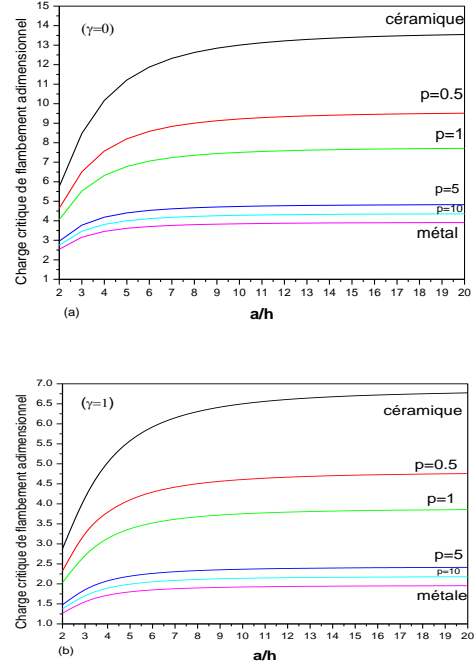


Fig. 3. Charge critique de flambement adimensionnel en fonction du rapport (a/h) de la plaque sandwich (1-2-1) pour différentes valeurs de p : (a) plaque soumise à une charge de compression uniaxiale ( $\gamma=0$ ) et (b) plaque soumise à une charge de compression biaxiale ( $\gamma=1$ ).

### Conclusion

En conclusion, on peut dire que la théorie raffinée proposée est exacte et simple pour la résolution des problèmes de flambement des plaques sandwiches en FGM. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque.

### REFERENCES

- [1] Bao, Young, G., Wang, L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. International Journal of Solids and Structures 32, 2853-2871, 1995.
- [2] Naotake Noda. Thermal stresses in functionally graded materials, Journal of Thermal Stresses 22, 477-512, 1999.
- [3] Li, Q., Iu, V.P., Kou, K.P. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. Journal of Sound and Vibration 311, 498-515, 2008.