

# Modélisation des voiles en béton armée par la méthode des éléments finis : Modèle plaque multicouche multicellulaire

A. RADOUANI<sup>1a</sup>, A. ELHARFI<sup>1</sup>, M. HRAITA

<sup>1</sup> Laboratory of Mechanics (LM), Department of Physics, Faculty of Sciences-Rabat, P.O. Box 1014, Morocco.

<sup>2</sup> Laboratoire de Thermodynamique, Département de Physique, Faculté des Sciences, B.P.1014, Rabat

## Abstract

A numerical model on the flexibility method in the case of a multilayer beam finite element has been developed and the contributions to its recent developments being made at Mechanical laboratory, Department of physics, Faculty of Sciences Rabat (Morocco). The results of the experiments and those of numerical calculations were concordant in the case of quasi-static loading. These results were based on the approach "finite element" coupled with a non-linear model [17]. Firstly, we present here the results based approach "finite element" related to the analysis of a bending square plate under concentrated and uniform load, clamped or simply supported on the contour. On the other hand, we present some results which we evidence to the problem related to the shear locking. The numerical model is based on a three-dimensional model of the structure seen here as a set of finite elements for multilayered plates multi cellular matrix (concrete) and a set of finite element fibers for reinforcement. The results obtained confirm the ability of these tools to correctly represent the behavior of quasi-statics of such a complex system and presage the deepening of a digital tool developed.

**Keywords** multicellular multilayer plate, numerical approach, Finite element flexible.

## 1. Introduction

Les voiles ou murs de contreventement sont des éléments à deux dimensions dont la raideur hors plan est négligeable. Dans leur plan, ils présentent une grande résistance et une grande rigidité vis-à-vis les secousses horizontales d'origine sismique.

Selon les exigences de leur fonctionnement, les voiles sont classés en deux grandes familles (élancés et courts). De ce fait, ils subissent des modes de ruptures différents (glissement, écrasement du béton, plastification de l'acier...) suivants les types de sollicitations (flexion, torsion et effort tranchant).

Depuis plusieurs décennies, de nombreuses études expérimentales sur le comportement des voiles en béton armé ont été effectuées dans le monde ; des essais sur des éléments de structures complètes de géométries différentes ont été ainsi réalisés en vue d'obtenir une vision intégrale sur leur comportement statique et vis-à-vis des secousses sismiques.

En raison de leur coût et de la difficulté de leur réalisation, les voiles en béton armé seront modélisés numériquement par la méthode des éléments finis avec l'adoption d'une théorie des plaques de type Reissner-Mindlin ; basée sur l'hypothèse cinématique des sections droites ou planes qui tient compte de l'influence des déformations du cisaillement transversal.

## 2. Eléments de la théorie des plaques :

Les plaques sont des structures tridimensionnelles dont une dimension, l'épaisseur  $h$ , est très inférieure aux autres dimensions. L'hypothèse de base est donc que dans cette direction la déformation longitudinale, c'est-à-dire la variation, est nulle (la contrainte correspondante est négligée). Cela se traduit commodément par  $\sigma_z \equiv 0$  dans un système d'axe local lié à la plaque. Pour des raisons d'interprétation physique, c'est dans ce système que sont généralement calculés tous les déplacements, déformations et contraintes. En tout point de cette surface et dans les axes absolus, les trois déplacements et les trois rotations usuels sont :  $u_x, u_y, u_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z$ .

Dans les axes locaux ils deviennent  $u, v, w, \beta_x, \beta_y$ . La flèche  $w$  est une fonction de  $x$  et  $y$  seulement :  $w = w_o(x, y)$  et les rotations sont celles de la normale à la plaque. La rotation locale  $\beta_z$  dans le plan de la plaque est négligée.

Par ailleurs, ces éléments reposent sur la théorie des plaques en petits déplacements et petites déformations selon laquelle : Les sections droites qui sont les sections perpendiculaires à la surface moyenne restent droites ; les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée. Il résulte de cette approche que les champs de déplacements varient linéairement dans l'épaisseur de la plaque. Si l'on désigne par  $u, v, w$  les déplacements d'un point  $M(x, y, z)$  suivant  $x, y, z$ , on a ainsi la cinématique de Hencky-Mindlin :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_o(x, y) \\ v_o(x, y) \\ w_o(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \theta_y(x, y) \\ -\theta_x(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_o(x, y) \\ v_o(x, y) \\ w_o(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les déformations tridimensionnelles en tout point, avec la cinématique introduite précédemment, sont ainsi données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = e_{xx} + zk_{xx} \\ \varepsilon_{yy} = e_{yy} + zk_{yy} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = 2e_{xy} + 2zk_{xy} \\ \gamma_x = 2\varepsilon_{xz} \\ \gamma_y = 2\varepsilon_{yz} \end{cases}$$

Où  $e_{xx}, e_{yy}$  et  $e_{xy}$  sont les déformations membranaires de la surface moyenne,  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  les déformations associées aux cisaillements transverses, et  $k_{xx}, k_{yy}$  et  $k_{xy}$  les déformations de flexion de la surface moyenne.

En adoptant la cinématique de Hencky-Mindlin, on identifie le travail des efforts intérieurs :

$$W_{def} = \int (e_{xx}N_{xx} + e_{yy}N_{yy} + 2e_{xy}N_{xy} + \gamma_x T_x + \gamma_y T_y + k_{xx}M_{xx} + k_{yy}M_{yy} + 2k_{xy}M_{xy}) dS$$

**Equation d'équilibre**

Le principe du travail s'écrit de la manière suivante :

$$\delta W_{def} = \delta W_{ext} \quad \text{Pour tous déplacements transversaux et rotations virtuels admissibles.}$$

Avec la cinématique Hencky, il en résulte qu'après intégration par parties du travail de déformations les équations d'équilibre statique des plaques s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Pour les efforts : } & \begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0 \\ T_{x,x} + T_{y,y} = -q_z \end{cases} \\ \text{Pour les couples : } & \begin{cases} M_{xx,x} + M_{xy,y} - T_x = 0 \\ M_{yy,y} + M_{xy,x} - T_y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**3. Modélisation**

Après avoir donné la description d'un élément de la théorie des plaques, nous présentons dans la suite une formulation d'éléments finis plaque multifibre de cinématique Euler- Bernoulli et Timoshenko existantes dans la littérature.

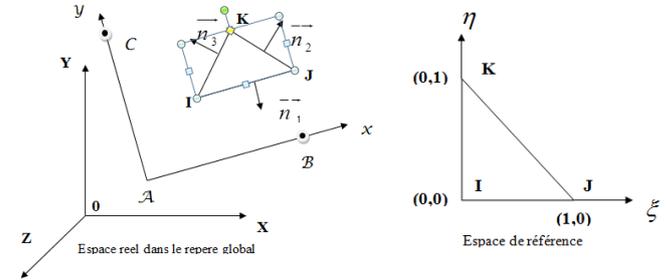
**Elément plaque multicellulaire (multifibre)**

Une plaque multifibre est un élément fini basé sur la théorie des plaques dont chaque surface est divisée en fibres. A chaque fibre nous pouvons associer une loi de comportement locale en contraintes - déformations et donc différents matériaux. Ce type de description possède les avantages d'hypothèses simplificatrices associées à une cinématique de type plaque Euler-Bernoulli [6, 10, 11, 12, 13, 14, 15], ou Timoshenko [4, 7, 8, 9, 13, 16] tout en offrant une solution robuste et rapide.

Les équations d'équilibre peuvent prendre la forme suivante :

$$N = H_m e + H_{mf} k ; \quad M = H_{mf} e + H_f k \quad \text{et} \quad T = H_{ct} \gamma$$

Les matrices  $H_m, H_f$  et  $H_{ct}$  sont les matrices de rigidité en membrane, flexion et cisaillement transverse, respectivement,  $k$  est le facteur de correction de cisaillement. La matrice  $H_{mf}$  est une matrice de rigidité de couplage entre la membrane et la flexion.



**Fig. 1** - Système de base locale dans une base globale. Les fonctions d'interpolation dans l'espace parent sont naturellement données par :  $N_I(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$ ,  $N_J(\xi, \eta) = \xi$  et  $N_K(\xi, \eta) = \eta$

En équivalence des équations d'équilibre, nous pouvons exprimer une relation entre le vecteur force élémentaire nodal, à l'intérieur de la plaque et à l'extérieur d'un élément fini  $\{F_{int}^{pl}\}$  en fonction de l'expression réduite de ce vecteur force élémentaire  $\{\Sigma_I^r\}$ . Ainsi on obtient la matrice de passage du système sans modes rigides de déformations à 5 ddl.

On obtient donc un système à 5 ddl définis par un champ des efforts tel que :

$$\{F_{int}^{pl}\} = [R]^T \{\Sigma_I^r\}$$

Avec  $[R]$  la matrice de passage du système sans modes rigides de déformations et sera donné en conspirant l'hypothèse de calcul complémentaire suivante, et  $\{\Sigma_I^r\}$  le vecteur des efforts généralisés réduit obtenu en considérant les équations de la relation 50.c et est donné par :

$$\{\Sigma_I^r\}^T = \{N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, M_{xy_I}, M_{xx_J}, M_{yy_J}, M_{xy_J}, M_{xx_K}, M_{yy_K}, M_{xy_K}\}$$

$\{F_{int}^{pl}\}$  est tel qu'il est défini dans l'équation suivante :

$$W_{ext}^e = \sum_i q_i \Sigma_i^r = q^T \Sigma_i^r = (F_{int}^{pl})^T u^e$$

**4. Tests expérimentaux :**

Six cisaillements de cinq parois avec le même rapport d'aspect (WSH1 à WSH5,  $h / l = 2,28$ ) et ( $h / l = 2,26$  pour WSH6) ont été testés dans la réaction de mur de cisaillement au Laboratoire IBK. Ces murs représentent les murs de refend portant stabilisation d'un prototype bâtiment de trois étages. Les murs de contreventement ont la même largeur (2,00) et la même hauteur (4,56 m et 4,52 m pour WSH6) et l'épaisseur (0,15 m).

