

## Discussion sur de nouvelles stratégies de continuation basées sur les approximants de Padé : Application au post-flambage des coques minces

R. AYANE, A. HAMDAOUI, B. BRAIKAT, N. TOUNSI, N. DAMIL

Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux LIMAT, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca,  
B.P 7955 Sidi Othman, Casablanca, Maroc  
ayane7rachida@gmail.com, hamdaoui.abdellah@gmail.com.

### Résumé

On se propose, dans ce travail, de discuter trois nouvelles stratégies de continuation utilisant de nouveaux approximants de Padé récemment proposés dans [2] et [3]. En effet, nous avons démontré dans [2] qu'on peut construire plusieurs approximants de Padé sans passer par la technique d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. La première stratégie proposée est basée sur une minimisation de l'erreur relative entre deux approximants de Padé consécutifs [3]. Les deux autres stratégies proposées sont obtenues à partir d'une perturbation des coefficients  $b_k^M$  utilisées pour construire la représentation rationnelle [2]. Les résultats de ces stratégies seront comparés aux résultats obtenus à l'aide des approximants de Padé habituellement utilisés dans la MAN par la technique d'orthogonalisation de Gram-Schmidt [1]. Cette première expérimentation numérique est présentée dans le cadre du post-flambage des coques minces.

### 1. Introduction et présentation des stratégies proposées

De nombreux problèmes en mécanique se ramènent à la résolution d'une équation vectorielle non linéaire de la forme :

$$\{R(\{V\}, \lambda)\} = \{0\} \quad (1)$$

où  $\{V\}$  est un vecteur inconnu de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda$  est un paramètre scalaire,  $\{R\}$  est une fonction vectorielle à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . La Méthode Asymptotique Numérique MAN [1] permet d'obtenir la branche solution  $\{V(\lambda)\}$  du problème non linéaire (1) morceau par morceau. En effet, partant d'un point solution initial  $\{U^j\} = \langle \{V^j\}, \lambda^j \rangle$ , on cherche la solution du problème sous la forme d'une représentation en série vectorielle  $\{U^S\}$  au voisinage de ce point, tronquée à un ordre  $N$  :

$$\{U^S\}(a) = \sum_{k=0}^N a^k \{U_k\} \text{ avec } \{U_k\} = \begin{Bmatrix} \{V_k\} \\ \lambda_k \end{Bmatrix}, a \in [0, a_{max}^S]. \quad (2)$$

où  $a$  est un paramètre de chemin défini par une équation auxiliaire de type Riks [1],  $[0, a_{max}^S]$  est le domaine de validité de  $\{U^S\}(a)$  est estimé par la relation suivante :

$$a_{max}^S = \left( \varepsilon_s \frac{\|\{v_1\}\|}{\|\{v_N\}\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (3)$$

où  $\varepsilon_s$  est un paramètre de précision. Une seule inversion de la matrice de rigidité tangente  $[K_t]$  permet de

calculer tous les termes de la série vectorielle de la manière suivante:

$$\{U_k\} = \lambda_k [K_t]^{-1} \{F\} + [K_t]^{-1} \{F_k^{nl}\}, \quad k = 1, \dots, N \quad (4)$$

où les  $\{F_k^{nl}\}$  sont des seconds membres qui dépendent des termes d'ordres inférieurs. Ce qui permet d'obtenir un morceau de la branche solution. Nous procédons de manière similaire pour obtenir la branche suivante, en définissant le point de départ de cette nouvelle branche comme étant le dernier point de la branche précédente  $\{U^j\} = \{U(a_{max}^S)\}$ . Ainsi, on obtient, d'une manière analytique, pas à pas toute la branche solution.

Afin d'élargir le domaine de validité de chaque morceau de la branche solution, on remplace la représentation en série vectorielle (2) par son approximant de Padé suivant:

$$\{U_P^M\}(a) - \{U_j^M\} = \sum_{i=1}^M \frac{\Delta_{M-i}^M(a)}{\Delta_M^M(a)} a^i \{U_i\} = \frac{1}{\Delta_M^M(a)} [U_M] [B_M] \{a_{M-1}\} \quad (5)$$

où  $M = N - 1$  est l'ordre de troncature de l'approximant de Padé,  $[U_M] = [\{U_1\} \dots \{U_M\}]$  est une matrice constituée des termes de la série,  $\Delta_k^M(a) = \sum_{i=0}^k a^i b_i^M$ ,  $0 \leq k \leq M$  avec  $b_0^M = 1$  est le polynôme permettant de définir tous les approximants de Padé dans (5),  $[B_M] = (\beta_{ij}^M)$  est une matrice triangulaire supérieure qui est telle que  $\beta_{ij}^M = b_{j-i}^M$ ,  $1 \leq i \leq j \leq M$  et en fin  $\{a_{M-1}\} = \langle a, a^2, \dots, a^M \rangle$  est un vecteur constitué des puissances du paramètre de chemin.

Les coefficients  $b_i^M$ ,  $i = 1, \dots, M$  sont classiquement calculés par la technique d'orthonormalisation de Gram-Schmidt [1]. Le domaine de validité  $[0, a_{max}^P]$  de l'approximant de Padé vectoriel (5) est calculé en résolvant l'équation suivante comme dans [1] :

$$\frac{\| \{U_P^M(a_{max}^P)\} - \{U_j^{M-1}(a_{max}^P)\} \|_2}{\| \{U_P^M(a_{max}^P)\} - \{U_j^M\} \|_2} = \varepsilon_p$$

où  $\varepsilon_p$  est un paramètre de précision. De la même manière que dans le cas de la représentation série, on procède à une continuation de la branche en remplaçant  $\{U^j\}$  par  $\{U(a_{max}^P)\}$  pour obtenir la branche suivante.

Dans [1], nous avons montré comment calculer les coefficients  $b_i^M$  en s'appuyant sur la technique d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Dans [2], on a montré que les coefficients  $b_i^M$  peuvent être choisis de manière quelconque. Parmi cette famille, nous avons montré dans un travail récent [3] qu'un choix judicieux des coefficients  $b_i^M$  à l'ordre  $M$  en fonction des coefficients  $b_i^{M-1}$  à l'ordre  $M-1$  peut réduire l'erreur relative entre deux approximations de Padé tronqués aux ordres  $M$  et  $M-1$   $\{U_p^M\}(a)$  et  $\{U_p^{M-1}\}(a)$

C'est la première stratégie qui sera rediscutée dans ce travail.

Deux autres stratégies seront aussi évaluées. Elles sont basées sur des choix quelconques des coefficients  $b_i^M$  du polynôme  $\Delta_i^M(a)$  définissant les approximations de Padé dans (5). Plus exactement, nous allons tout simplement perturber les deux derniers coefficients du polynôme  $\Delta_i^M(a)$  obtenus par l'orthogonalisation de Gram-Schmidt ce qui définit les deux autres stratégies.

Sur l'exemple du flambage d'un toit cylindrique articulé le long des deux bords opposés et libre sur les deux autres, nous allons comparer le nombre de pas Padé nécessaire pour obtenir toute la solution en calculant les coefficients  $b_i^M$  du polynôme  $\Delta_i^M(a)$  par la technique d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (Padé classique) au nombre de pas nécessaire pour obtenir la même courbe en choisissant d'abord les coefficients  $b_i^M$  qui minimisent l'erreur (première stratégie proposée) et ensuite en perturbant les coefficients  $b_i^M$  du polynôme  $\Delta_i^M(a)$  (deuxième et troisième stratégie proposées).

## 2. Application numérique : Flambage d'un toit cylindrique avec deux types d'épaisseurs

On considère, dans cette application, le flambage d'un toit cylindrique articulé le long des deux bords opposés et libre sur les deux autres. Le toit est de longueur  $2L = 504\text{mm}$ , de rayon  $R = 2540\text{mm}$ , d'angle de demi ouverture  $\theta = 0.1\text{rad}$ , fait d'un matériau homogène, élastique et isotrope, de module d'Young  $E = 3102.75\text{MPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , soumis à un chargement vertical  $\lambda F$  appliqué au point central ( $F = 1000\text{N}$ ) (figure 1); avec  $\lambda$  est un paramètre de chargement. Cet exemple est un benchmark largement utilisé pour discuter la robustesse des méthodes numériques [4]. Selon la valeur de l'épaisseur les solutions présentent un flambage par point limite et/ou un point de rebroussement (figure 2).

Par raison de symétrie, seulement un quart du toit est discrétisé en 200 éléments finis de type *DKT18*; soit 726 degrés de liberté. Deux types d'épaisseurs seront étudiées:  $h = 12.7\text{mm}$  et  $h = 6.35\text{mm}$ .

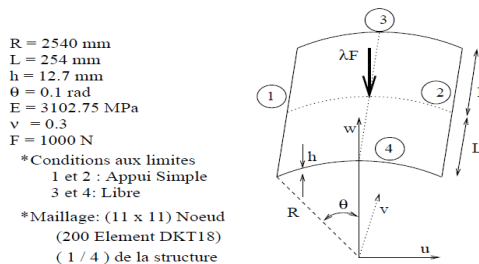


Figure 1: Flambage d'un toit mince cylindrique chargé au centre:

On représente sur les tableaux 1 (cas du toit mince) et 2 (cas du toit épais), les résultats obtenus par les deux stratégies utilisées classiquement dans la MAN à savoir l'algorithme MAN-Série et l'algorithme MAN-Padé (Padé Classique). Nous avons aussi donné pour comparaison les résultats obtenus à l'aide des stratégies utilisant les nouveaux Padé proposés dans ce travail :

**Stratégie 1 :** On choisit les coefficients qui minimisent l'erreur relative

**Stratégie 2 :** On divise les deux derniers coefficients par 2.2

**Stratégie 3 :** On divise les deux derniers coefficients par 2.2 et 2.3 respectivement.

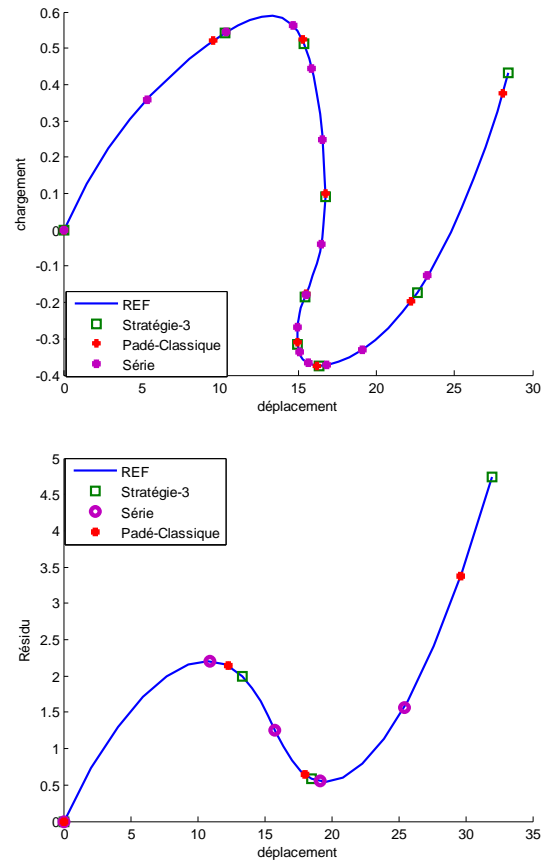


Figure 2 : Courbe charge-déplacement pour  $h = 6.35\text{mm}$  et  $h = 12.7\text{mm}$ . Continuation MAN ordre 0.

Pour chacune de ces stratégies, on donne le nombre de pas nécessaire pour calculer toute la courbe solution jusqu'au point indiqué sur les tableaux. On donne aussi sur les tableaux les valeurs du déplacement  $w$  au centre du toit et du chargement  $\lambda$  de ce point et ce pour différents ordres de troncature de la MAN. Pour les continuations série et Padé, les paramètres de tolérances pour la continuation ont été fixés à  $\varepsilon_s = \varepsilon_p = 10^{-6}$ .

**Toit mince  $h = 6.35\text{mm}$  :** D'après les résultats obtenus dans le tableau 1, on peut ainsi voir que lorsqu'on utilise des coefficients  $b_i^M$  quelconques on peut trouver de bons résultats comparables à la continuation classique utilisant l'orthonormalisation de

Gram Schmidt pour le calcul des coefficients du Padé comme le montre la colonne pour les ordres  $N=10, 20$ .

Signalons d'abord, comme on pouvait s'y attendre, que toutes les stratégies utilisant une continuation basée sur une représentation rationnelle à l'aide des approximants de Padé permettent de retrouver la même solution obtenue à l'aide d'une continuation basée sur une représentation en série mais avec un nombre de pas moindre et ce pour tous les ordres testés.

On remarque que cette première expérimentation numérique, dans le cas du toit mince, la première stratégie permet de construire une solution par continuation en utilisant ce nouveau Padé sauf que le dernier point est légèrement en deçà par rapport à la continuation avec les Padé classiques. Mais par contre les stratégies 2 et 3, pour cet exemple, permettent dans certains cas de retrouver les mêmes résultats, voir légèrement mieux, que la stratégie utilisant les Padé classiques et ce aux deux ordres 10 et 20 testés.

Stratégie	N=10			N=20		
	NPAS	w	$\lambda$	NPAS	w	$\lambda$
Série	23	22.05	-0.2	12	19.1	-0.3
	24	25.22	0.03	13	23.2	-0.1
	25	28.7	0.46	14	29.2	0.5
Padé Classique	19	21.82	-0.2	6	16.2	-0.37
	20	25.07	0.02	7	22.2	-0.1
	21	28.5	0.44	8	28.0	0.37
Stratégie 1	19	17.6	-0.3	6	14.9	-0.2
	20	19.2	-0.3	7	15.4	-0.3
	21	21.8	-0.2	8	17.6	-0.3
Stratégie 2	19	20.36	-0.2	6	16.6	-0.37
	20	23.01	-0.1	7	18.6	-0.34
	21	27.5	0.2	8	28.2	0.4
Stratégie 3	19	21.82	-0.2	6	16.3	-0.37
	20	25.07	0.02	7	22.6	-0.17
	21	28.55	0.44	8	28.4	0.43

Table 1 : Influence de l'ordre sur la solution obtenue par les différentes stratégies de la MAN (Série, Padé-Classique, Nouveaux-Padé où les  $b_i$  sont déduits soit par minimisation, soit par perturbation des deux derniers coefficients) pour le flambage du toit  $h=6.35$  avec  $\varepsilon_s = \varepsilon_p = 10^{-6}$

**Toit épais  $h = 12.7\text{mm}$ :** Sur le tableau 2, on représente les résultats obtenus par les différentes stratégies utilisées dans la MAN à savoir l'algorithme MAN-Série et MAN-Padé. Cette nouvelle expérimentation numérique, pour le cas du toit épais, confirme exactement les mêmes constatations que dans le cas d'un toit mince. On peut constater, d'après les résultats présentés dans le tableau 2, que lorsqu'on utilise des coefficients  $b_i^M$  quelconques on peut trouver de bons résultats comme le montre la colonne des ordres  $N = 10, 20$ .

Sur la figure 2, pour les deux épaisseurs, on a représenté les courbes charge-déplacement obtenues par la continuation MAN série, Padé classique et Stratégie 3, avec un ordre de troncature égale à 20. On peut constater, par exemple dans le cas d'un toit épais, que la stratégie 3 permet d'obtenir en 3 pas de continuation la courbe jusqu'au

point  $w=32.1$  et  $\lambda=4.74$ , et que 3 pas de continuation avec les Padé classiques permettent d'obtenir la courbe jusqu'au point  $w=29.67$  et  $\lambda=3.375$ . La stratégie 3, dans ce cas, permet une légère amélioration. De même on peut constater que dans le cas du toit mince, la stratégie 3, pour  $N=20$ , permet d'obtenir la courbe en 8 pas jusqu'au point  $w=28.4$  et  $\lambda=0.43$  à comparer avec la continuation Padé classique qui dans les mêmes conditions permet d'obtenir la courbe en 8 pas jusqu'au point  $w=28.0$  et  $\lambda=0.37$ .

Stratégie	N=10			N=20		
	NPAS	w	$\lambda$	NPAS	w	$\lambda$
Série	6	18.8	0.56	2	15.79	1.247
	7	21.6	0.69	3	19.15	0.552
	8	25.71	1.66	4	25.4	1.57
Padé Classique	5	18.14	0.62	1	12.26	2.14
	6	20.93	0.61	2	18.02	0.643
	7	25.5	1.6	3	29.67	3.375
Stratégie 1	5	17.14	0.81	1	12.25	2.144
	6	19.2	0.55	2	16.92	0.86
	7	22.55	0.84	3	26.68	2.01
Stratégie 2	5	17.52	0.72	1	13.3	1.97
	6	20.28	0.56	2	18.35	0.60
	7	17.52	0.72	3	13.43	1.97
Stratégie 3	5	17.87	0.66	1	13.33	1.99
	6	20.67	0.59	2	18.50	0.58
	7	24.37	1.26	3	32.01	4.74

Table 2 : Influence de l'ordre sur la solution obtenue par les différentes stratégies de la MAN (Série, Padé-Classique, Nouveaux-Padé où les  $b_i$  sont déduits soit par minimisation ; soit par perturbation des deux derniers coefficients) pour le flambage du toit  $h=12.7$  avec  $\varepsilon_s = \varepsilon_p = 10^{-6}$

### 3. Conclusion

Nous avons construit un nouveau approximant de Padé vectoriel de la même forme que l'approximant récemment introduit dans [2]. Dans ces premières expérimentations numériques sur l'exemple du flambage d'un toit épais et d'un toit mince, le domaine de validité de ce nouveau approximant dans certains cas est comparable voir légèrement plus large que celui obtenu par une orthonormalisation de la base. Nous avons présenté dans cette communication les premiers résultats de cette expérimentation, il reste à chercher la stratégie optimale et automatique afin de rendre cet algorithme performant.

### Références

- [1] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, Méthode Asymptotique Numérique, Hermès – Lavoisier, Paris (2007).
- [2] A. Hamdaoui, R. Hihi, B. Braikat, N. Tounsi, N. Damil, A new class of Vector Padé approximants in the Asymptotic Numerical Method: application in nonlinear 2D elasticity. World Journal of Mechanics, 4 (2014), 44-53.
- [3] A. Hamdaoui, B. Braikat, N. Tounsi, N. Damil, On the use of Padé approximant in the Asymptotic Numerical Method ANM to compute the post-buckling of shells, soumis en Décembre 2016.
- [4] M. A. Crisfield and Vincenzo Ciampi, Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Vol. 1. Meccanica 32.6 (1997): 586-587.