

Un nouvel exemple de spectre essentiel : Oscillations d'un liquide dans un container tournant fermé par une plaque circulaire élastique

H. ESSAOUINI¹, L. EL BAKKALI¹, P. CAPODANNO²

¹Abdelmalek Essaâdi University, Faculty of Sciences, M2SM ER28/FS/05, 93030 Tetuan, Morocco,
e-mail : hilal_essaouini@yahoo.fr

² Université de Franche-Comté, 2B Rue des jardins, F - 25000, Besançon, France,
e-mail : pierre.capodanno@neuf.fr

Résumé :

Nous étudions les petites oscillations d'un liquide idéal contenu dans un vase fermé par une plaque circulaire élastique et en rotation uniforme, problème qui généralise le problème classique où le vase est entièrement rigide [1]. L'analyse fonctionnelle réduit les équations du mouvement à deux équations opératorielles dans un espace de Hilbert convenable. Ils démontrent que le spectre est constitué d'un spectre discret et d'un spectre essentiel remplissant un intervalle.

Mots clés : *Petites oscillations, Liquide idéal, Théorie des plaques, Méthodes variationnelles et Spectrales.*

1 Introduction

Quand un disque élastique tourne uniformément dans un plan, à l'équilibre relatif, les tensions principales s'exercent le long du rayon vecteur et perpendiculairement à celui-ci. Si a est le rayon, ρ_0 la densité, ω_0 la vitesse angulaire de rotation, leurs valeurs à la distance r du centre sont [2] :

$$\sigma_{rr} \stackrel{\text{def}}{=} P = A(a^2 - r^2) \rho_0 \omega_0^2,$$

$$\sigma_{\theta\theta} \stackrel{\text{def}}{=} Q = (Aa^2 - Bb^2) \rho_0 \omega_0^2,$$

avec

$$A = \frac{3 + \sigma}{8} \quad ; \quad B = \frac{1 + 3\sigma}{8} \quad ,$$

(σ coefficient de Poisson).

Etudions les vibrations transversales du disque \mathcal{D} (épaisseur h , module d'Young E , module de rigidité $D = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}$) soumis à des forces extérieures normales à son plan, de densité $q(r, \theta, t)$. (r, θ coordonnées polaires); appelons $w(r, \theta, t)$ le déplacement normal.

L'énergie potentielle des forces centrifuges est [2] :

$$V_2 = \int_{\mathcal{D}} \frac{h}{2} \left[P \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{Q}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad ,$$

L'énergie potentielle de flexion est [2] :

$$V_1 = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \int_{\mathcal{D}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right]^2 \right] \right\} r dr d\theta$$

L'énergie cinétique de la plaque est :

$$\mathcal{C} = \frac{\rho_0 h}{2} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta$$

A l'aide du principe de Hamilton :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \mathcal{C} - \delta V_1 - \delta V_2 + \int_{\mathcal{D}} q \delta w r dr d\theta \right] dt = 0 \quad ,$$

Nous avons l'équation des vibrations transversales de la plaque [2] :

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(P r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{h Q}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - D \Delta \Delta w + q \quad ,$$

Si le bord de la plaque est fixé

$$w = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{for } r = a$$

2 Position du problème et équations du mouvement

Nous considérons un container de révolution fermé par une plaque circulaire élastique Γ qui a le même axe vertical (Ox_3) que le container et qui est fixé par son bord à la paroi de celui-ci. O est le centre de la plaque.

Le vase contient un liquide parfait incompressible (densité ρ) pesant, en contact avec la plaque, nous appelons S la paroi du vase mouillée par le liquide et Ω le domaine occupé par celui-ci.

Le système container-liquide tourne avec la vitesse angu-

laire constante ω_0 autour de l'axe (Ox_3).

Nous nous proposons d'étudier les petites oscillations d'un système liquide-plaque autour de sa position d'équilibre relatif, en supposant que le liquide reste en contact avec le container et la plaque et que les vibrations de la plaque sont transversales.

Soit $\vec{u}(r, \theta, x_3, t)$ le petit déplacement d'une particule du liquide par rapport à sa position d'équilibre relatif (r, θ, x_3 sont les coordonnées cylindriques dans un système d'axes $Ox_1x_2x_3$ tournant autour de Ox_3 avec la vitesse angulaire ω_0).

En tenant compte du théorème de Coriolis et en introduisant la pression dynamique p , différence entre la pression et la pression à l'équilibre relatif, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\ddot{\vec{u}} - 2\omega_0 \dot{\vec{u}} \times \vec{x}_3 = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

L'équation d'incompressibilité s'écrit :

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2)$$

La condition cinématique s'écrit :

$$u_n|_S \stackrel{\text{def}}{=} \vec{u} \cdot \vec{n}|_S = 0 \quad \text{sur } S \quad (3)$$

D'autre part, si on appelle ζ la déflexion de la plaque par rapport à sa position d'équilibre relatif, on a :

$$\rho_0 h \ddot{\zeta} = \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Pr \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + \frac{hQ}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} - D \Delta \Delta \zeta + p|_\Gamma - \rho g \zeta. \quad (4)$$

avec les conditions

$$\zeta \quad 2\pi\text{-périodique en } \theta, \quad (5)$$

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = a, \quad (6)$$

$$u_n|_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \vec{u} \cdot \vec{n}|_\Gamma = \zeta, \quad (7)$$

$$\int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = 0 \quad (8)$$

L'équation (8) exprime que le volume du liquide est constant.

Multipliant (4) par $\bar{\zeta}$, $\bar{\zeta}$ étant une fonction égulière vérifiant (5), (6), (8), intégrant sur Γ et effectuant des intégrations par parties, nous obtenons l'équation :

$$\int_\Gamma (p|_\Gamma - \rho_0 h \ddot{\zeta}) \bar{\zeta} \, d\Gamma = \int_\Gamma \left[h \left(P \zeta_r \bar{\zeta}_r + \frac{Q}{r^2} \zeta_\theta \bar{\zeta}_\theta \right) + D \Delta \zeta \cdot \Delta \bar{\zeta} + \rho g \zeta \bar{\zeta} \right] \, d\Gamma \quad (9)$$

avec

$$\zeta_r = \frac{\partial \zeta}{\partial r}, \quad \zeta_\theta = \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}.$$

Supposons alors que

$$\zeta, \bar{\zeta} \in \tilde{H}_0^2(\Gamma) = \left\{ \zeta \in H^2(\Gamma); \zeta = 0; \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0 \right. \\ \left. \text{sur } \partial\Gamma; \int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = 0 \right\}$$

En posant le second membre de l'équation (9) comme suit :

$$b(\zeta, \bar{\zeta}) = \int_\Gamma \left[h \left(P \zeta_r \bar{\zeta}_r + \frac{Q}{r^2} \zeta_\theta \bar{\zeta}_\theta \right) + D \Delta \zeta \cdot \Delta \bar{\zeta} + \rho g \zeta \bar{\zeta} \right] \, d\Gamma$$

On vérifie aisément que $b(\zeta, \bar{\zeta})$ est une forme sesquili-néaire continue et coercive sur $\tilde{H}_0^2(\Gamma)$.

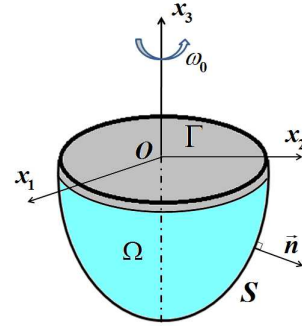
D'autre part,

$$\tilde{H}_0^2(\Gamma) \subset \tilde{L}^2(\Gamma) = \left\{ \zeta \in L^2(\Gamma), \int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = 0 \right\}$$

est continue, dense et compacte.

Appelant \mathcal{B} l'opérateur non borné de $\tilde{L}^2(\Gamma)$ associé à $b(\zeta, \bar{\zeta})$ et au couple $(\tilde{H}_0^2(\Gamma), \tilde{L}^2(\Gamma))$, l'équation (9) est classiquement équivalente à

$$p|_\Gamma - \rho_0 h \ddot{\zeta} = \mathcal{B} \zeta \quad (10)$$



3 Les équations opératorielles du problème

3.1 Equation variationnelle

Nous cherchons \vec{u} dans l'espace :

$$J_{0,S}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \vec{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} [L^2(\Omega)]^3; \text{div} \vec{u} = 0; u_n|_S = 0 \right\}$$

sous la forme :

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{U} : \begin{cases} \vec{v} \in J_0(\Omega) \\ \vec{U} \in \mathcal{G}_{h,S}(\Omega) \end{cases}$$

avec

$$J_0(\Omega) = \{\vec{v} \in \mathcal{L}^2(\Omega); \operatorname{div} \vec{v} = 0; v_{n|\partial\Omega} = 0\}$$

$$\mathcal{G}_{h,S}(\Omega) = \left\{ \vec{U} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi; \Phi \in \tilde{H}^1(\Omega); \Delta \Phi = 0 \right.$$

$$\left. \text{dans } \Omega; \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = 0, \right\}$$

et $\tilde{H}^1(\Omega) = \{\Phi \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \Phi \, d\Omega = 0\}$.

En vertu de la décomposition orthogonale dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ [1] :

$$J_{0,S}(\Omega) = J_0(\Omega) \oplus \mathcal{G}_{h,S}(\Omega),$$

Et en introduisant une fonction régulière

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = \vec{v} + \vec{U},$$

on déduit de l'équation d'Euler (1) l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho (\ddot{\vec{v}} + \ddot{\vec{U}}) \cdot (\vec{\bar{v}} + \vec{\bar{U}}) \, d\Omega \\ - 2\rho\omega_0 \int_{\Omega} [(\dot{\vec{v}} + \dot{\vec{U}}) \times \vec{x}_3] \cdot (\vec{\bar{v}} + \vec{\bar{U}}) \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \cdot \vec{\bar{u}} \, d\Omega = 0 \end{array} \right.$$

Transformant la dernière intégrale au moyen de la formule de Green et de l'équation (10), nous obtenons l'équation variationnelle du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{U}} \cdot \vec{\bar{U}} \, d\Omega - 2\rho\omega_0 \int_{\Omega} (\dot{\vec{v}} \times \vec{x}_3) \cdot \vec{\bar{U}} \\ - 2\rho\omega_0 \int_{\Omega} (\dot{\vec{U}} \times \vec{x}_3) \cdot \vec{\bar{U}} \, d\Omega \\ + b(U_{n|\Gamma}, \tilde{U}_{n|\Gamma}) + \rho_0 h \int_{\Gamma} \ddot{U}_{n|\Gamma} \vec{\bar{U}}_{n|\Gamma} \, d\Gamma = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

3.2 Equations opératorielles

i) Nous introduisons les opérateurs $P_0, A_{11}, A_{12}, A_{21}$ définis dans [1].

Appliquant le projecteur P_0 à l'équation d'Euler (1), nous obtenons une première équation opératorielle :

$$\ddot{\vec{v}} - 2i\omega_0 A_{11} \dot{\vec{v}} - 2i\omega_0 A_{12} \dot{\vec{U}} = 0 \quad (12)$$

Les opérateurs A_{ij} ont les propriétés suivantes : A_{11} est l'opérateur bien connu de Coriolis [1] ; il est autoadjoint ; $\|A_{11}\| = 1$; son spectre $\sigma(A_{11})$ coïncide avec son spectre essentiel $\sigma_{ess}(A_{11})$ et remplit l'intervalle $[-1, 1]$. A_{12} et

A_{21} sont mutuellement adjoints ; A_{22} est auto adjoint et on a $\|A_{12}\| = \|A_{21}\| \leq 1, \|A_{22}\| \leq 1$.

ii) En Appliquant une méthode dans la référence [1], nous déduisons une équation opératorielle équivalente à l'équation variationnelle (11) :

$$\ddot{\vec{U}} - 2i\omega_0 (A_{21} \dot{\vec{v}} + A_{22} \dot{\vec{U}}) + Q_0 \vec{U} = 0 \quad (13)$$

avec Q_0 est l'opérateur non borné associé à la forme sesquilinéaire $\frac{1}{\rho} b(\cdot, \cdot)$ et au couple (V, H) convenablement choisi [3]. Les équations (12) et (13) sont les équations opératorielles du problème.

4 Etude du spectre du problème

Nous cherchons les solutions de (12) et (13) dépendant du temps t suivant la loi $e^{i\omega t}$, ω réel.

Les équations (12), (13) s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0 A_{11} & 2\omega_0 A_{12} & 0 \\ 2\omega_0 A_{21} & 2\omega_0 A_{22} & Q_0^{1/2} \\ 0 & Q_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{U} \\ \vec{U}_0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{U} \\ \vec{U}_0 \end{pmatrix}$$

avec $Q_0^{1/2} \vec{U} = \omega \vec{U}_0$.

L'étude de cette équation opératorielle [1] conduit à la conclusion suivante :

Conclusion

Le spectre du problème est réel et il est formé de :

- 1) Spectre essentiel remplissant l'intervalle fermé $[-2\omega_0, 2\omega_0]$ qui est un domaine de résonance.
- 2) Spectre discret situé à l'extérieur de cette intervalle avec les points d'accumulations possibles $\pm\omega_0$ et $\pm\infty$.

Références

- [1] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics*, Vol. 1, Birkhauser Verlag, Basel, 2001.
- [2] G. Krall, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, Part 2^a, Eredi Virgilio Veschi, Roma, 1970.
- [3] J.Sanchez Hubert, E.Sanchez Palencia, *Vibration and coupling of continuous systems-Asymptotic methods*, Springer Verlag, Berlin, 1989.