

Aziz Hraïba¹, Mohamed Mansouri², Ahmed Mousrij³

^{1,3}Univ Hassan 1, LIMMII, FST Settat, 26000 Settat, Maroc

²Univ Hassan 1, LIMMII, ENSA- Khouribga, 26000 Settat, Maroc

mansouri1969@yahoo.fr

Résumé. L'analyse de la fiabilité des grandes structures est difficile car le nombre de variables aléatoires d'entrée et le nombre de réponses à traiter sont généralement grands. Lorsque le comportement mécanique de la structure n'est pas fortement non-linéaire, les surfaces de réponse présentent des outils intéressants pour évaluer la fiabilité. Ce papier expose une stratégie de résolution appliquée à une structure. Elle consiste à simplifier le problème initial dans le but de conserver l'information essentielle. Pour cela, un calcul de fiabilité a été réalisé pour la structure avant optimisation et après optimisation. Cet article concerne aussi une simulation numérique de structure en mécanique, basée sur les méthodes éléments finis MEF, réalisée dans un ordre de difficulté croissante pour mettre en évidence les contraintes et les déformations des modèles considérés. Nous montrons l'efficacité de la méthode des ELF, pour caractériser le comportement statique des poutres soumises à un chargement de traction, en comparant notamment les performances de cette méthode (via le code MATLAB) par rapport à la méthode classique par élément fini (sous le logiciel ANSYS).

Mots clés. Simulation, Eléments finis, optimisation, Fiabilité, FORM, SORM.

1- Introduction

Le principal objectif de l'optimisation fiabiliste est de trouver une solution optimale des structures en satisfaisant simultanément un certain niveau de fiabilité. Généralement, un problème d'optimisation fiabiliste est formulé comme un problème général d'optimisation classique en prenant en compte l'indice de fiabilité dans les contraintes [1]. L'analyse de fiabilité est l'évaluation probabiliste du risque ou de la défaillance d'un système sur certaines limites spécifiées. La fiabilité est la probabilité rapportée à la parfaite opération d'un système structural donné durant un certain temps, appelé temps de vie utile, en conditions normales d'opération. Une bonne synthèse des techniques d'analyse de fiabilité appliquées à des systèmes structuraux est présentée dans [2]. Parmi les principales méthodes numériques développées pour l'analyse de fiabilité des structures, on peut citer : la simulation de Monte Carlo (SMC), les méthodes d'approximation locale de premier et deuxième ordre (FORM - First Order Reliability Method et SORM-Second Order Reliability Method) et la méthode de surface de réponse liée à ces dernières techniques. La plupart des méthodes classiques de modélisation en mécanique sont basées sur la discrétisation du domaine continu en employant des maillages. Parmi les plus connues sont les méthodes des éléments finis (MEF), des volumes finis et des différences finies.

On se propose dans ce travail de présenter le contexte et les enjeux de l'étude. On définira ainsi les notions de

performance structurale, puis on présentera les méthodes d'évaluation de cette performance ainsi que les objectifs attendus.

2- Approche probabiliste

On appelle approche probabiliste la méthode qui s'appuie sur la théorie de la fiabilité pour évaluer la probabilité de défaillance ou l'indice de fiabilité de la structure. Le mode de fonctionnement de la structure est, comme pour l'approche semi-probabiliste, décrit par un état limite mais les incertitudes liées aux paramètres d'entrée sont introduites sous forme de loi de probabilité affectée à chaque variable. Ces lois de probabilité sont établies à partir d'études statistiques sur les paramètres concernés. L'approche probabiliste consiste alors à calculer la probabilité de dépassement du critère d'état limite, appelée probabilité de défaillance P_f , que l'on compare à une probabilité de défaillance acceptable P_{f0} : $P_f(R < S) \leq P_0$

L'approche probabiliste est séduisante puisqu'elle permet de prendre en compte un très large spectre d'incertitudes. Cependant, elle est limitée par le manque d'études statistiques concernant les différentes variables d'entrée et la complexité des calculs de probabilité. De plus, les différentes variables d'entrée présentent souvent des corrélations difficiles à détecter et pouvant varier dans de fortes proportions d'un ouvrage à un autre ; le traitement de ces corrélations nécessiterait des calculs complexes et surtout la collecte d'une volumineuse quantité de données pour chaque ouvrage traité. Par ailleurs, l'approche probabiliste nécessite la définition d'une probabilité de défaillance acceptable qui est une notion difficile à apprécier et donc à quantifier.

3- Méthodes de calcul

En pratique, on recourt à des méthodes d'estimation pour calculer l'indice de fiabilité β . On distingue deux types de méthode :

Méthodes de niveau II : on représente la fonction d'état limite g par une surface approchante, un hyperplan dans le cas de la méthode FORM (First Order Reliability Method) ou par une hyperparaboloïde dans le cas de la méthode SORM (Second Order Reliability Method).

L'indice de fiabilité β est alors donné par la distance entre l'origine O de l'espace normalisé et cette surface ; on en déduit la probabilité de défaillance $P_f = \Phi(-\beta)$.

Méthodes de niveau III : on procède à un tirage aléatoire des couples de valeurs des variables aléatoires R et S et on vérifie pour chaque couple s'il y a défaillance ou non ; la probabilité de défaillance P_f est définie comme le rapport entre le nombre de tirages ayant conduit à la défaillance et le nombre total de tirages. Ce type de méthode requiert un grand nombre de tirages pour obtenir des résultats fiables et

peut donc se révéler très coûteuse en terme de temps de calcul.

4-Couplage mécano-fiabiliste

La théorie de la fiabilité permet donc de connaître l'indice de fiabilité (ou la probabilité de défaillance) d'une structure. Dans le cadre d'une application directe de cette théorie à l'évaluation de la sécurité de la structure, il convient de se fixer une valeur référence de cet indice de fiabilité, traduisant un niveau de sécurité que l'on juge acceptable : on appelle cette valeur l'indice de fiabilité cible β_c . La structure sera alors jugée sûre, vis-à-vis d'un mode de défaillance donné, si elle vérifie : $\beta_c \geq \beta$. La valeur de l'indice de fiabilité cible est difficile à appréhender puisqu'elle traduit le niveau de sécurité que l'on veut se fixer et qu'elle dépend ainsi, entre autres, de la durée de vie de l'ouvrage, des conséquences engendrées par sa ruine ou des critères économiques liés à son entretien et son remplacement.

Dans le schéma de couplage mécano-fiabiliste [2], un protocole de dialogue doit se mettre en place entre le code éléments finis et le code fiabiliste. Le pilotage doit se faire par le module fiabiliste. A chaque itération de recherche du point de conception, le transfert d'informations est nécessaire entre les deux modules: le code fiabiliste transmet au code éléments finis les réalisations des variables aléatoires avec lesquelles l'analyse mécanique doit se faire et à la fin du calcul éléments finis, la réponse est intégrée dans le code fiabiliste pour le calcul de la fonction de performance. Cette interactivité est indispensable pour permettre au module fiabiliste de définir sa stratégie de recherche de l'indice β . Dans cette étude, nous avons utilisé un couplage externe avec un code éléments finis commercial ANSYS ; le protocole de dialogue est automatisé grâce au code MATLAB.

5-Résultats numériques

5-1 Etude déterministe

Dans cette étude numérique, on s'intéresse au dimensionnement d'une poutre.

Les données du problème sont les suivantes : la densité $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$; la section circulaire $A=0,42 \text{ m}^2$; la limite d'élastique : Re de moyenne =550 MPa et l'écarte type $ERe=16,36 \text{ MPa}$.

Pour assurer la sûreté de bon fonctionnement de notre structure on doit garantir l'équation suivante en tout point :

$$\sigma = \frac{P}{A} < Re(1)$$

Puisque Re dépend de la nature du matériau et P dépend de la géométrie du modèle donc on cherche à adopter la géométrie la mieux possible pour que notre structure respect l'équation (1). Donc on trouve que :

$$\frac{P}{Re} - A < 0 \quad (2)$$

Comme le poids est défini classiquement par l'équation (3). En conséquence P varie le long de la hauteur H de la poutre.

$$P = Mg \quad (3)$$

$$\text{Avec} \quad M = \rho \cdot A \cdot H \quad (4)$$

En se basant sur les différentes données du problème, on a adopté une méthode de modélisation classique qui repose sur la variation de la section le long de la hauteur de

la poutre en respectant les limites des propriétés du matériau de notre cas d'étude.

Après une étude statique on a trouvé les résultats illustrés sur la figure 1:

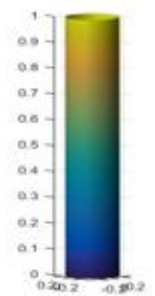
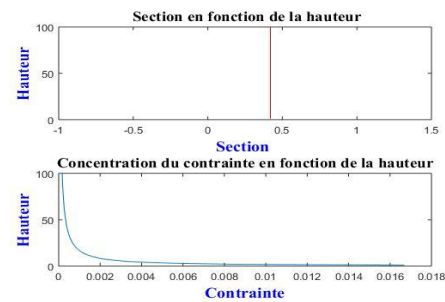


Figure 1

Comme montre la figure 1, le system admet une section constante le long de la hauteur de la poutre avec une concentration des contraintes au niveau de l'encastrement.

5-2 Etude fiabiliste

La modélisation probabiliste d'un mode de défaillance se fait par la définition d'une fonction $G(X)$ appelée fonction d'état limite ou fonction de performance. Notons que par construction la fonction $G(X)$ est elle-même une variable aléatoire. Donc le succès du dimensionnement de notre structure se traduit par l'équation (1), ainsi nous avons pour fonction de performance :

$$G(P, Re) = Re * A - P > 0 \quad (5)$$

Avec $Re * A$ la variable de résistance et P la variable de sollicitation.

Indice de Rjanitzyne-Cornell : D'après [4] la fonction de performance G suit une loi normale de moyenne μ_G et d'écart-type σ_G , on a :

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_G(x) dx \quad (6)$$

$$= \Phi\left(\frac{0 - \mu_G}{\sigma_G}\right) \quad (7)$$

$$= \Phi(-\beta_c) \quad (8)$$

Si on considère que $G(r,s) = r-s$ ou R et S sont des variables gaussiennes indépendantes, nous aurons :

$$\mu_G = \mu_R - \mu_S \quad (9)$$

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (10)$$

$$\beta_c = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (11)$$

Où R est la résistance et S la sollicitation.

Indice de Hasfer-Lind : Cet indice est défini de la manière suivante : Indice de Hasfer-Lind

$$\beta_{HL} = \text{distance} \left(0; G(\{X_i(\mu_j)\} = 0) \right)$$

$$= \min_{G(\{X_i(u_j)\} \leq 0)} \sqrt{\{u\}^T \{u\}} \quad (12)$$

Dans le cas de deux variables aléatoire, β_{HL} correspond au β de la figure 2 où X_1 et X_2 sont centrées réduites et non corrélées.

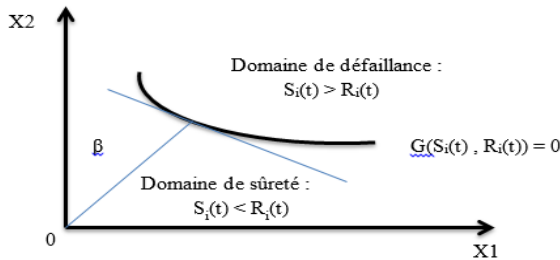


Figure 2 : représentation de la fonction d'état limite

Pour notre problème les variables P et Re étant gaussiennes, nous avons directement d'après l'équation (11) :

$$\beta_c = (\mu_{ReA} - \mu_P) / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (13)$$

Pour pouvoir se servir de l'équation (13), il faut faire un changement de variables afin d'avoir des paramètres gaussiens. On pose :

$$R = \ln R = \ln ReA \text{ et } S = \ln S = \ln P \quad (14)$$

$$\text{Or, } \mu_{\ln ReA} = \ln \left(\frac{\mu_{ReA}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{ReA}}{\mu_{ReA}}\right)^2}} \right), \quad \sigma_{\ln ReA} = \sqrt{\ln \left(1 + \left(\frac{\sigma_{ReA}}{\mu_{ReA}}\right)^2 \right)} \quad (15)$$

$$\text{et } \mu_{\ln P} = \ln \left(\frac{\mu_P}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_P}{\mu_P}\right)^2}} \right), \quad \sigma_{\ln P} = \sqrt{\ln \left(1 + \left(\frac{\sigma_P}{\mu_P}\right)^2 \right)} \quad (16)$$

Ainsi, d'après l'équation (13), on peut écrire :

$$\beta_c = \frac{(\mu_{\ln ReA} - \mu_{\ln P})}{\sqrt{\sigma_{\ln ReA}^2 + \sigma_{\ln P}^2}} = 2.117 \quad (17)$$

D'après l'équation (8) on peut calculer la probabilité de défaillance.

$$P_f = \Phi(-\beta_c) = 0.516 \quad (18)$$

5-3 Calcul de l'indice de fiabilité

Le tableau suivant montre les résultats de calcul de l'indice de fiabilité par les méthodes FORM et SORM.

Méthodes	Rjanitzyne-Cornell	FORM	SORM
Probabilité de défaillance	0,516	0,499	0,502
Indice de fiabilité	2,117	2,870	2,870

Tableau 1 : comparaison des résultats

La figure 3 présente la géométrie le mieux adoptée pour notre structure avec une variation de la section le long de la hauteur ainsi représente une concentration linéaire des contraintes.

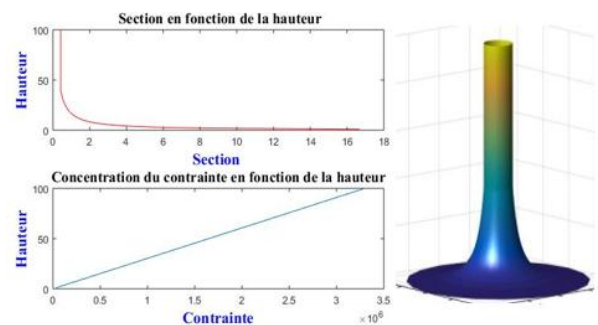


Figure 3

6- Conclusion : Nous avons montré dans cet exemple, l'opportunité et l'efficacité de la méthode mécano-fiabiliste pour étudier la la fiabilité d'une structure élastique via le calcul de l'indice de fiabilité. Et en fin par une étude d'optimisation de forme nous avons trouvé la géométrie optimale.

Références

[1] G. Muscolino, G. Ricciardi, N. Impollonia, "Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input", Probabilistic Engineering Mechanics, 15,199-212, 1999.

[2] M. Mansouri, B. Radi, A. El Hami, D. Borza, "Reliability analysis of vibro-acoustic problem", in "Proceedings of the International Conference Uncertainties", Brasil, 2012.