

Calcul des contraintes d'une structure composite par la méthode SSDQM (State Space Quadrature Method) et comparaison des résultats vis-à-vis ANSYS

M. BOUSFIA¹, M. ABOUSSALEH², B. OUHBI¹

1. Equipe de Modélisation et Extraction des Connaissances (ModEC), ENSAM-MEKNES.

mohammedbousfia@hotmail.com/ouhbi@yahoo.co.uk

2. Equipe Modélisation et Ingénierie Intégrée (M2II), ENSAM-MEKNES. aboussaleh_med@yahoo.fr

Résumé

Le présent papier présente une méthode semi-analytique, basée sur la théorie d'élasticité tridimensionnelle, en combinant l'approche des équations d'état avec la technique des différences quadratiques afin d'étudier une structure stratifiée composite soumise à un chargement sinusoïdale en développant un code de calcul sous MATLAB. Les résultats générés ont été comparés avec le logiciel de simulation ANSYS pour le cas où la pulsation du chargement est nulle, nous avons constaté que les résultats se coïncident intégralement.

Mots clefs : *Stratifiés composites, Equations d'états, contraintes, la fatigue, critère de rupture*

1. Introduction

Les plaques stratifiées composites se sont parmi les éléments de structure élémentaire, on les trouve dans divers domaines industriels tel que l'aviation, les automobiles, génie mécanique, l'aérospatiale etc... Ceci est principalement dû au fait que ces composants, par rapport aux structures conventionnelles et traditionnelles, ont de grands avantages de promettre une rigidité élevée et un rapport résistance / poids élevé [1]. Ainsi, la recherche de modèles mécaniques et mathématiques correspondants pour prédire leur comportement de fatigue dynamique, qui est d'une grande importance dans la modélisation de nombreuses structures mécaniques dans les aspects d'utilisation mentionnés ci-dessus en plus d'autres modes d'emploi, a été un axe de recherche intensif pendant plusieurs décennies.

La théorie tridimensionnelle (3D) est une autre analogie pour analyser les caractéristiques mécaniques des plaques composites stratifiées. Parmi ceux-ci, on peut citer l'analyse 3D exacte [2], la méthode 3D des éléments finis [3], la théorie 3D des couches [4] et la théorie 3D de l'élasticité [5] etc. Parmi les approches numériques les plus répandues figure la technique des différences quadratiques (DQ), initialement proposée par Bellman et ses collaborateurs dans les années 70 [6] où la première application pour des plaques composites a été réalisée par Bert et al. [7]. Il a été prouvé que la méthode DQ est plus efficace que les méthodes classiques des différences finies et d'éléments finis [8].

Plus récemment, une méthode semi-analytique appelée SSDQM, qui combine la méthode de l'espace d'état (SSM) et la technique des différences quadratiques (DQ) et complètement basée sur la théorie de l'élasticité bidimensionnelle, a été introduite par Chen et al. [9] qui a réussi à analyser la vibration libre des poutres laminées à paillettes croisées. La SSDQM a la même supériorité que la SSM dans l'analyse des structures stratifiées, car l'équation de résolution finale ne dépend pas du nombre de couches impliquées. Dans ce travail, notre intention est d'exercer l'application de cette méthode semi-analytique, Basé sur la théorie tridimensionnelle de l'élasticité, sur une plaque composite stratifiée d'empilement [0/90/90/0] simplement appuyés sur ses quatre bords et soumis à une charge constante. La procédure est mise en œuvre en exprimant toutes les variables d'état en termes de fonctions trigonométriques dans la direction des coordonnées de l'un des arêtes simplement supportées et en employant la technique DQ par rapport à la direction des coordonnées entre les deux autres arêtes. En conséquence, une équation d'état vis-à-vis les coordonnées variables le long de l'épaisseur est dérivée et résolue. Des exemples numériques sont finalement réalisés et une comparaison approfondie est faite avec les résultats obtenus par simulation sous ANSYS, par lesquelles les critères de précision et de convergence de l'approche SSDQM sont validés.

2. Les équations d'état (Formulation théorique)

Considérons une plaque stratifié composite à plis croisés de longueur a , largeur b et d'épaisseur h . La plaque est composée de m couche orthotrope linéairement élastique, chaque couche est d'épaisseur $h_k = z_k - z_{k-1}$.

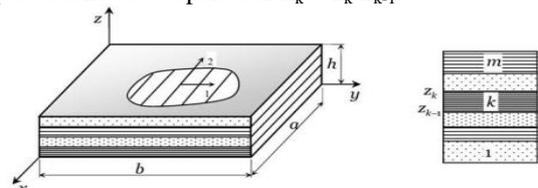


Figure 1 : Géométrie de la plaque stratifié composite

Le système de coordonnées principale (x, y, z) est supposée en coïncidence avec les axes du matériau et l'origine est placé de sorte que les coordonnées varient de cette manière : $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h$.

Nous supposons que la plaque est supportée par des appuis simples sur ces quatre côtes.

Considérons un chargement sinusoïdal de fréquence circulaire ω , on écrit :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= X(x,z) \sin(\Lambda_b y) e^{i\omega t}, \quad \sigma_y = Y(x,z) \sin(\Lambda_b y) e^{i\omega t}, \\ \sigma_z &= Z(x,z) \sin(\Lambda_b y) e^{i\omega t}, \quad \tau_{xz} = T_{xz}(x,z) \sin(\Lambda_b y) e^{i\omega t}, \\ \tau_{yz} &= T_{yz}(x,z) \cos(\Lambda_b y) e^{i\omega t}, \quad \tau_{xy} = T_{xy}(x,z) \cos(\Lambda_b y) e^{i\omega t}, \\ u &= U(x,z) \sin(\Lambda_b y) e^{i\omega t}, \quad v = V(x,z) \cos(\Lambda_b y) e^{i\omega t}, \\ w &= W(x,z) \sin(\Lambda_b y) e^{i\omega t} \quad \text{où } \Lambda_b = n\pi/b, X, Y, \dots \text{ sont des} \\ &\text{fonctions indéterminées de } x \text{ et } z.\end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées de référence du stratifié orthotrope (x, y, z), nous écrivons les équations d'équilibre (en absence des forces volumiques) et la loi de comportement et en remplaçant les contraintes et déplacements par les expressions ci-dessus et en suivant la procédure de la méthode SSM [10] nous obtenons (éq.1) :

$$\frac{\partial}{\partial z} S = \begin{bmatrix} 0 & A_1^{(k)} \\ A_2^{(k)} & 0 \end{bmatrix} S \quad \text{où } A_1^{(k)} = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 & \frac{\partial}{\partial x} & \Lambda_b \\ \frac{\partial}{\partial x} & c_7 & 0 \\ -\Lambda_b & 0 & c_8 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$A_2^{(k)} = \begin{bmatrix} c_9 & c_1 \frac{\partial}{\partial x} & & -c_5 \Lambda_b \\ c_1 \frac{\partial}{\partial x} & -\rho\omega^2 + c_6 \Lambda_b^2 - c_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & (c_3 + c_6) \Lambda_b \frac{\partial}{\partial x} & \\ c_5 \Lambda_b & -(c_3 + c_6) \Lambda_b \frac{\partial}{\partial x} & -\rho\omega^2 + c_4 \Lambda_b^2 - c_6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \end{bmatrix}$$

où l'indice k signifie la k^{ème} couche du stratifié et le vecteur S s'écrit : $S = [Z \ U \ V \ W \ T_{xz} \ T_{yz}]^T$ tel que Z, U, V, W, T_{xz} , T_{yz} sont appelées les variables d'états (ou variables de base). Les expressions des coefficients c_i utilisés sont :

$$\begin{aligned}c_1 &= -\frac{Q_{13}}{Q_{33}}, \quad c_2 = Q_{11} - \frac{Q_{13}^2}{Q_{33}}, \quad c_3 = Q_{12} - \frac{Q_{13}Q_{23}}{Q_{33}}, \\ c_4 &= Q_{22} - \frac{Q_{23}^2}{Q_{33}}, \quad c_5 = -\frac{Q_{23}}{Q_{33}}, \quad c_6 = Q_{66}, \\ c_7 &= \frac{1}{Q_{55}}, \quad c_8 = \frac{1}{Q_{44}}, \quad c_9 = \frac{1}{Q_{33}}.\end{aligned}$$

Où les constantes de rigidités sont exprimées ainsi :

$$\begin{aligned}Q_{11} &= c_{11}p^4 + c_{22}q^4, \quad Q_{12} = c_{12}(p^4 + q^4), \quad Q_{22} = c_{11}q^4 + c_{22}p^4, \\ Q_{13} &= c_{13}p^2 + c_{23}q^2, \quad Q_{23} = c_{13}q^2 + c_{23}p^2, \quad Q_{44} = c_{44}p^2 + c_{55}q^2 \\ Q_{55} &= c_{44}q^2 + c_{55}p^2, \quad Q_{33} = c_{33}, \quad Q_{66} = c_{66}.\end{aligned}$$

Tel que : $p = \cos\theta$, $q = \sin\theta$ où θ (0° ou 90°) est l'angle entre l'axe principal 1 du matériau et l'axe x d'une seule couche.

Les formules des constantes élastiques du matériau sont :

$$\begin{aligned}c_{11} &= \frac{E_1(E_2 - \vartheta_{23}^2 E_3)}{\mu E_2}, \quad c_{22} = \frac{E_2(E_1 - \vartheta_{13}^2 E_3)}{\mu E_2} \\ c_{33} &= \frac{E_3(E_1 - \vartheta_{12}^2 E_2)}{\mu E_1}, \quad c_{12} = c_{21} = \frac{\vartheta_{12} E_2 + \vartheta_{13} \vartheta_{23} E_3}{\mu} \\ c_{23} &= c_{32} = \frac{E_3(\vartheta_{23} E_1 + \vartheta_{12} \vartheta_{13} E_2)}{\mu E_1}, \quad c_{44} = G_{23} \\ c_{13} &= c_{31} = \frac{E_3(\vartheta_{13} + \vartheta_{12} \vartheta_{23})}{\mu}, \quad c_{55} = G_{13}, \quad c_{66} = G_{12}\end{aligned}$$

$$\text{avec } \mu = 1 - \vartheta_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} - \vartheta_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} - \vartheta_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - 2\vartheta_{12} \vartheta_{23} \vartheta_{13} \frac{E_3}{E_1}$$

E_i est le module d'Young, ϑ_{ij} est le coefficient de poisson,

G_{ij} est le module de cisaillement, ρ est la masse volumique.

Les variables X, Y et T_{xy} sont déduites à partir des variables d'état :

$$X = c_2 \frac{\partial U}{\partial x} - c_3 \lambda_b V - c_1 Z, \quad Y = c_3 \frac{\partial U}{\partial x} - c_4 \lambda_b V - c_5 Z,$$

$$T_{xy} = c_6 \frac{\partial V}{\partial x} + c_6 \lambda_b U.$$

3. Procédure semi-analytique (SSDQM)

L'importance de cette approche vient du fait qu'il est impossible de trouver des fonctions continues décrivant la variation des contraintes et des déplacements le long des axes d'une plaque où on a des liaisons autre que l'appui simple sur deux de ses arrêtes. Une alternative de la solution exacte est la technique des différences quadratiques développée par Chen et al. [9] où la dérivée n^{ème} par rapport à x de la fonction continue $f(x,z)$ en un point x_i est approximée comme une somme linéaire de fonctions pondérées à tous les points discrets le long de l'axe x, c'est-à-dire :

$$\left. \frac{\partial^n f(x_i, z)}{\partial x^n} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(n)} f(x_j, z), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

Où N est le nombre de discrétisation et $g_{ij}^{(n)}$ sont les coefficients de pondération dépendants de x_i , dont les expressions se trouvent dans Réf [11].

Appliquons cette technique au système (éq.1) nous aurons :

$$\frac{dZ_i}{dz} = -\rho\omega^2 W_i - \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} T_{xz,j} + \lambda_b T_{yz,i},$$

$$\frac{dU_i}{dz} = -\sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} W_j + c_7 T_{xz,i},$$

$$\frac{dV_i}{dz} = -\lambda_b W_i + c_8 T_{yz,i},$$

$$\frac{dW_i}{dz} = c_9 Z_i + c_1 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} U_j - c_5 \lambda_b V_i,$$

$$\begin{aligned}\frac{dT_{xz,i}}{dz} &= c_1 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} Z_j + (c_6 \lambda_b^2 - \rho\omega^2) U_i \\ &\quad - c_2 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(2)} U_j + (c_3 + c_6) \lambda_b \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} V_j,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dT_{yz,i}}{dz} &= c_5 \lambda_b Z_i - (c_3 + c_6) \lambda_b \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} U_j \\ &\quad + (c_4 \lambda_b^2 - \rho\omega^2) V_i - c_6 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(2)} V_j.\end{aligned}$$

$$X_i = c_2 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} U_j - c_3 \lambda_b V_i - c_1 Z_i,$$

$$Y_i = c_3 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} U_j - c_4 \lambda_b V_i - c_5 Z_i,$$

$$T_{xy,i} = c_6 \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} V_j + c_6 \lambda_b U_i.$$

L'assemblage à tous les points de discrétisations, de ces équations conduit à l'équation d'état globale suivante (éq.2) :

$$\frac{d}{dz} \Delta = \mathbf{M}^{(k)} \Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_1^{(k)} \\ \mathbf{M}_2^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta,$$

où $\Delta = [Z \ U \ V \ W \ T_{xz} \ T_{yz}]^T$, $Z = [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_N]^T$,

Et les composantes de Δ sont définies comme vecteur Z. Notons que I est la matrice identité d'ordre N, la condition d'appui simple prise en $x=0$ ou $x=a$ et $y=0$ ou $y=b$ nous donne : $V = W = X = 0$ et l'expression des points x_i adoptée (points Chebyshev-Gauss-Lobatto [12]) est la suivante :

$$x_i = \frac{a}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{(i-1)\pi}{N-1} \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

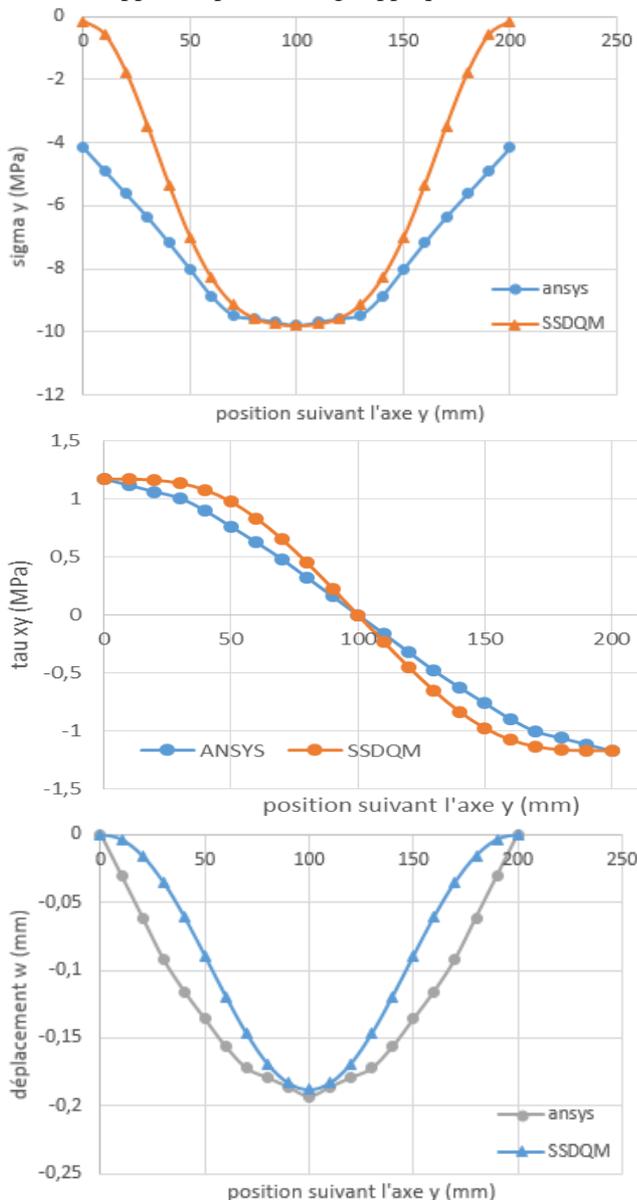
En tenant compte des conditions aux initiales, on aura :

$$M_1^{(k)} = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 \mathbf{I}_{N-2} & -\mathbf{g}_{SS}^{(1)} & \lambda_b \mathbf{I}_{N-2} \\ -\left[\mathbf{g}_{SS}^{(1)}\right]^T & c_7 \mathbf{I}_{N-2} & 0 \\ -\lambda_b \mathbf{I}_{N-2} & 0 & c_8 \mathbf{I}_{N-2} \end{bmatrix} \quad \text{où } \begin{cases} f_{SSij} = g_{il}^{(1)} g_{lj}^{(1)} + g_{in}^{(1)} g_{nj}^{(1)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N), \\ g_{SSij}^{(1)} = w_{ij}^{(1)} \quad (i = 2, 3, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, N), \\ \mathbf{g}_{SS}^{(2)} = \mathbf{g}_{CC}^{(2)}. \end{cases}$$

$$M_2^{(k)} = \begin{bmatrix} c_9 \mathbf{I}_{N-2} & c_1 \mathbf{g}_{SS}^{(1)} & -c_5 \lambda_b \mathbf{I}_{N-2} \\ c_1 \left[\mathbf{g}_{SS}^{(1)}\right]^T & (c_6 \lambda_b^2 - \rho\omega^2) \mathbf{I} + c_2 (\mathbf{f} - \mathbf{g}^{(2)}) & (c_3 + c_6) \lambda_b \left[\mathbf{g}_{SS}^{(1)}\right]^T \\ c_5 \lambda_b \mathbf{I}_{N-2} & -(c_3 + c_6) \lambda_b \mathbf{g}_{SS}^{(1)} & (c_4 \lambda_b^2 - \rho\omega^2) \mathbf{I}_{N-2} - c_6 \mathbf{g}_{SS}^{(2)} \end{bmatrix}$$

4. Résultats et discussions

Les figures suivantes présentent les résultats du déplacement w suivant l'axe z obtenus de la résolution du système (éq.2) sous MATLAB et ceux obtenus par simulation sous ANSYS sous les mêmes conditions initiales : appui simple, la charge appliquée est $P=0.05\text{MPa}$.



Nous constatons bien que les résultats sont parfaitement proches (écart généralement inférieur à 5%) voir identique au milieu de la plaque (zone fortement excitée). Les mêmes constatations pour les autres composantes des contraintes et déplacements, ce qui valide ce modèle de calcul SSDQM.

Références

- [1] R.J. Sylvester, Buckling of sandwich cylinders under axial load., *J Aeronaut Sci* ;29(1962):863-72.
- [2] S. Srinivas, A.K. Rao. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int J Solids Struct* ; 6 (1970) : 1463–81.
- [3] Y.M. Desai, G.S. Ramtekkar, A.H. Shah. Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model. *Compos Struct* ; 59 (2003) : 237–249.
- [4] W.H. Chen, W.W. Jiang. Resonant failure analysis of general composite laminates by using a mixed finite element method. *J Sound Vibr*;146(1991): 479–90.
- [5] W.B. Yu, D.H. Hodges, V.V. Volovoi. Asymptotic construction of Reissner-like composite plate theory with accurate strain recovery. *Int J Solids Struct*;39(2002):5185–03.
- [6] R. Bellman, B.G. Kashef, J. Casti. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of non-linear partial differential equations. *J Comput Phys* ; 10 (1972) : 40–52.
- [7] C.W. Bert, S.K. Jang, A.G. Striz. Nonlinear bending analysis of orthotropic rectangular plates by the method of differential quadrature. *Comput Mech* ; 5 (1989) : 217–226.
- [8] C.W. Bert, M. Malik. Transient analysis of gas-lubricated journal bearing systems by differential quadrature. *ASME J Tribol* ; 119 (1997) :91–99.
- [9] W.Q. Chen, C.F. Lv, Z.G. Bian. Elasticity solution for free vibration of laminated beams. *Compos Struct* ; 62 (2003) : 75–82.
- [10] W.Q. Chen, H.J. Ding. Free vibration of multi-layered spherically isotropic hollow sphere. *Int J Mech Sci*;43 (2001):667–80.
- [11] C. Shu, B.E. Richards. Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations. *Int J Numer Meth Fluids* ; 15 (1992) : 791–8.
- [12] A.N. Sherbourne, M.D. Pandey. Differential quadrature method in the buckling analysis of beams and composite plates. *Comp Struct* (1991) ; 40:903–13.