

Simulation numérique de l'effet du nombre de Rayleigh sur l'écoulement de Poiseuille faiblement compressible, anisotherme dans un canal

Sanae OUAJDI^{1,2,*}, Fayçal MOUFEKKIR¹, Ahmed MEZRHAB¹, Marc DAUMAS²

1. Laboratoire de Mécanique & Energétique, Faculté des Sciences, Université Mohammed 1 Oujda, Maroc.

2. Laboratoire PROMES CNRS UPR 8521, Université de Perpignan Via Domitia, France.

*. Physique-84@hotmail.com

Résumé

Cette étude a été effectuée pour examiner l'effet du nombre de Rayleigh sur l'écoulement de Poiseuille périodique, faiblement compressible et différentiellement chauffé dans un canal plan. L'approche numérique utilisée est basée sur la méthode de Boltzmann sur réseau avec des temps multiples de relaxation (MRT- LBM) pour le calcul des vitesses, couplée avec la méthode des différences finies (FDM) pour les températures [1]. Le fluide circulant est l'air à faible nombre de Mach, l'écoulement est bidimensionnel, laminaire et toutes les propriétés physiques sont constantes sauf la densité qui varie dans le sens de l'approximation de Boussinesq. Les résultats de ce travail sont présentés en termes de profils de vitesses, d'isothermes et de lignes de courant.

Mots-clés : LBM –MRT –FDM –Poiseuille–Anisothermal –Compressible.

1. Introduction

Nouvellement, l'écoulement de Poiseuille faiblement compressibles pour le gaz parfait et à faible nombre de Mach, a attiré l'attention de la communauté scientifique et a été étudié numériquement en utilisant différentes méthodes. Taliadorou et al. [2], ont étudié les solutions de perturbation dans le cas d'un écoulement de poiseuille axisymétrique isotherme plan pour le cas faiblement compressible des fluides newtoniens. Ils utilisent une équation linéaire de l'état pour l'analyse de la perturbation des variables d'écoulement primaire, les composantes de la vitesse et la pression, et la compressibilité est employée pour la perturbation des paramètres. Venerus [3] et Venerus et Bugajsky [4], ont obtenu les mêmes solutions respectivement pour le problème axisymétriques et le problème du flux plan. Housiadas and Georgiou [5] et Housiadas et al. [6] ont récemment développé la méthode des variables primaires pour avoir des solutions de perturbation de l'écoulement de poiseuille axisymétrique plan pour le cas faiblement compressible du fluide Oldroyd-B. Un modèle qui effectue un couplage entre la densité et la vitesse a été initié par Lallemand et al. [9]. Ils ont ajouté les effets de compressibilité dans les moments d'équilibre de la Méthode de Boltzmann, pour corriger les systèmes qui obéissent aux invariances galiléennes.

Ce travail a pour but d'examiner l'effet du Rayleigh sur l'écoulement de Poiseuille périodique, faiblement compressible et différentiellement chauffé. Dans le cas d'un gaz parfait (l'air) à faible nombre de Mach, au sein d'un canal plan. Pour mener à bien l'investigation de l'effet du nombre de Rayleigh sur le champ d'écoulement et la distribution de température dans le canal horizontal, différentes simulations numériques ont été réalisées pour un nombre de Reynolds $Re=100$, un nombre de compressibilité $\varepsilon_c=0.25$ et pour un nombre de Rayleigh variant de 10^3 à 10^5 . Les vitesses transversales, les lignes de courant et les lignes isothermes sont représentées dans les Figures 3 et 4, pour des nombres de Rayleigh allant de 10^3 à 10^5 qui caractérisent le régime d'écoulement laminaire.

Le papier est organisé comme suit : dans la section suivante, on présente la formulation mathématique et le modèle physique. Le modèle numérique, est présenté dans la troisième section. Ensuite, les résultats et les analyses concernant l'étude numérique sont présentés dans la section 4. Enfin, la conclusion de l'étude numérique font l'objet de la section 5.

2. Formulation mathématique et modèle physique

Le modèle physique de notre problème est un canal plan horizontal (Figure 1). Sur les parois de celui-ci, on a choisi les conditions aux limites de type Bounce-Back pour le calcul des vitesses. Ces conditions permettent d'avoir les vitesses nulles à l'interface fluide-parois solide. Sur les parois latérales de notre modèle, on a imposé des conditions de périodicité ainsi qu'une force volumique ajoutée à la vitesse dans la même direction que l'écoulement. Les deux parois supérieure et inférieure sont fixées à la même température avec $T_2=2T_1$. Cet automate cellulaire est considéré pour représenter notre écoulement faiblement compressible périodique anisotherme d'un gaz parfait à faible nombre de Mach. On a utilisé un écoulement bidimensionnel laminaire pour se concentrer sur le couplage entre la densité et la température.

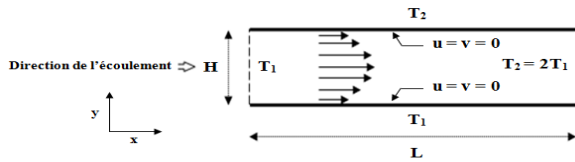


Figure 1. Géométrie du modèle simulé : Ecoulement de Poiseuille faiblement compressible périodique anisotherme dans un canal plan.

3. La méthode de Lattice Boltzmann

Pour simuler la plupart des écoulements, il faut résoudre les équations de Navier–Stokes. Ce sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement du fluide dans l’approximation des milieux continus. La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) permet de déterminer des solutions numériques aux équations de Navier-Stokes dans le cadre d'un automate cellulaire. La LBM modélise l'espace sous forme d'un réseau à deux ou trois dimensions. Le fluide est simulé par des particules de même masse qui se déplacent entre les nœuds du réseau. L'évolution de la LBM est très simple et s'effectue par pas de temps. Lors de la première étape nommée propagation, les particules sautent au site ou nœud voisin dans la direction où pointent leurs vitesses. Puis les particules qui sont en un même site rentrent en collision selon des règles déterministes préétablies. Les collisions conservent l'impulsion et le nombre de particules.

3.1 Modèle LBM-MRT

La méthode de Boltzmann à multiple temps de relaxation présente un avantage au niveau de l’amélioration de la stabilité [1]. L'idée essentielle de ce modèle est d'exécuter l'étape de collision dans l'espace des moments et l'étape de propagation se produit dans l'espace des phases ou de distributions. Le modèle Lattice Boltzmann utilisé est à neuf vitesses discrètes appelé modèle D2Q9 (Figure 2). Le modèle de Boltzmann sur réseau à 9 vitesses dans un réseau carré D2Q9 est le plus utilisé pour les écoulements bidimensionnels:

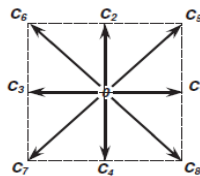


Figure 2. Le modèle D2Q9

L'espace est discrétisé en un réseau carré et les particules fluides se déplacent d'un nœud de la grille vers son voisin avec les vitesses discrètes définies par les équations (1). Les vitesses discrètes du modèle LBM à 2 dimensions et à neuf vitesses sont données par:

$$e_i = \begin{cases} (0,0), & i=0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c, & i=1-4 \\ \sqrt{2}(\cos[(2i-9)\pi/4], \sin[(2i-9)\pi/4])c, & i=5-8 \end{cases} \quad (1)$$

Où $c = \delta_x / \delta_t$ est la vitesse unité, δ_x et δ_t sont les pas de l'espace et de temps, respectivement. On considère $\delta_x = \delta_t = 1$ et que toutes les quantités sont adimensionnelles.

L'évolution de l'équation du modèle MRT-LBM, à neuf vitesses discrètes et à deux dimensions s'écrit sous la forme suivante:

$$f(r_j + e_i \delta_t, t_n + \delta_t) - f(r_j, t_n) = -M^{-1}S(m(r_j, t_n) - m^{eq}(r_j, t_n)) \quad (2)$$

Les fonctions de distribution $f_i(r_j, t_n)$ avec $i \in \{0, \dots, 8\}$ sont définies pour chaque nœud r_j en un temps t_n . Avec $f(r, t)$, $m(r, t)$, $m^{eq}(r, t)$ représentent respectivement les fonctions de distribution, les moments et les moments à l'équilibre. Ce sont des vecteurs à 9 dimensions comme suit : $f = (f_0, f_1, \dots, f_8)^T \in \mathbb{R}^9$,

$$m = (m_0, m_1, \dots, m_8)^T \in \mathbb{R}^9.$$

M est la matrice de transformation 9×9 , qui projette la fonction de distribution discrète sur l'espace de moment $m = Mf$ et $f = M^{-1}m$, et S la matrice de collision dans l'espace des moments.

4. Résultats et discussion

La figure 3, montre l'influence de la variation du nombre de Rayleigh sur les vitesses transversales. On observe que les profils des vitesses transversales ont drastiquement changé et ont pris des formes sinusoïdales. L'effet du Rayleigh implique une augmentation du module de vitesse, la forme de poiseuille n'a plus lieu et le profil de vitesse est remplacé par deux profils de poiseuille axisymétriques imparfaits. Cela entraîne une atténuation de la vitesse au centre du canal due à l'équilibre des forces de flottabilité d'origine thermique au centre, elle est largement décalée vers le haut du canal. L'écart entre les forces thermiques est plus important avec l'augmentation du Rayleigh.

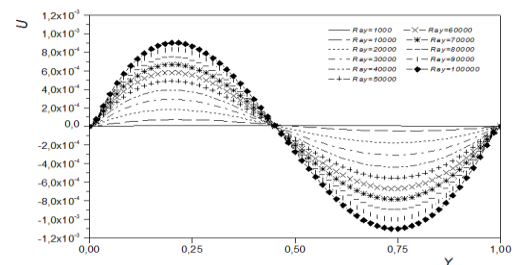


Figure 3. Effet du nombre de Rayleigh sur la vitesse transversale

La figure 4, présente les résultats sous forme de lignes de courant et d'isothermes pour plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh. L'effet du nombre de Rayleigh sur la structure des recirculations est nettement constaté. L'écoulement périodique forme un noyau de

recirculation à l'entrée et un autre à la sortie. Ils sont provoqués par la dépression qui règne à l'entrée et la sortie de canal. Accélération du champ dynamique avec le nombre de Rayleigh, due à l'effet de flottabilité thermique qui devient plus important avec l'augmentation du gradient de température. L'effet des recirculations diminue en donnant lieu à la symétrie des isolignes à la sortie du canal.

La paroi supérieure du canal possède une température supérieure à celle de l'air entrant et de la paroi inférieure. A cause de l'écart de températures, l'échange de chaleur se fait de la paroi chaude vers l'air. Les contours de températures sont allongés dans le sens de l'écoulement. Les isothermes prennent des allures paraboliques similaires au profil de poiseuille. L'augmentation du Rayleigh à un effet de chauffage qui reste restreint dans le cœur du canal, mais l'effet de la température d'entrée reste toujours prépondérante. La couche limite est localisée au niveau de la paroi supérieure. Les isothermes subissent une déformation à la sortie du canal, due à l'effet de forme qui est provoqué par le déséquilibre entre les forces de flottabilité thermique et la force de Poiseuille.

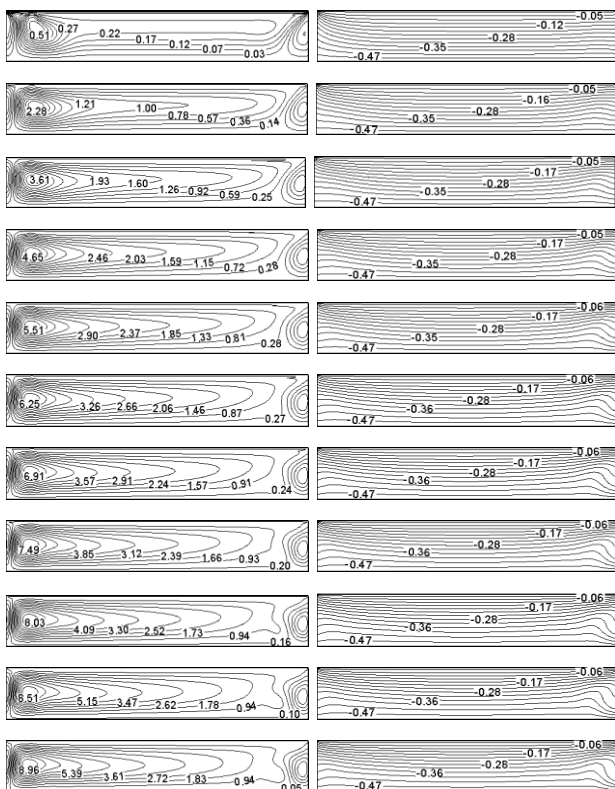


Figure 4. Effet du nombre de Rayleigh sur les lignes de courant et les isothermes pour

(a) $Ra = 1000$, (b) $Ra = 10000$, (c) $Ra = 20000$, (d) $Ra = 30000$,
 (e) $Ra = 40000$, (f) $Ra = 50000$, (g) $Ra = 60000$, (h) $Ra = 70000$,
 (i) $Ra = 80000$, (j) $Ra = 90000$, (k) $Ra = 100000$

5. Conclusion

L'étude est réalisée pour comprendre les phénomènes physiques de l'écoulement de Poiseuille faiblement compressible anisotherme et bidimensionnel dans un canal. Plusieurs simulations numériques ont été effectuées pour analyser l'effet du nombre de Rayleigh sur le champ dynamique et thermique dans le canal. Les résultats sont présentés en termes de vitesses, isothermes et lignes de courant. Les résultats obtenus lors de cette étude conduisent aux conclusions suivantes :

Accélération du module de vitesse et du champ dynamique, due à l'effet de flottabilité thermique qui devient plus important avec l'augmentation du gradient de température. L'effet de compressibilité est toujours présent au centre avec l'annulation de la vitesse qui est largement décalée vers le haut du canal.

L'effet des recirculations diminue en donnant lieu à la symétrie des isolignes à la sortie du canal. Les contours de température sont allongés dans le sens de l'écoulement. L'augmentation du Rayleigh à un effet de chauffage qui reste restreint dans le cœur du canal, mais l'effet de la température d'entrée reste toujours prépondérante. La couche limite est localisée au niveau de la paroi supérieure.

Références

- [1] A. Mezrhab, M. Bouzidi, P. Lallemand, Hybrid lattice Boltzmann finite difference simulation of convective flows, *Computer and Fluids*, Vol. 33, pp. 623-641, 2004.
- [2] E. Taliadorou, M. Neophytou, GC. Georgiou, Perturbation solutions of Poiseuille flows of weakly compressible Newtonian liquids, *J Non-Newton Fluid Mech*, 158, pp. 162-169, 2009.
- [3] D.C. Venerus, Laminar capillary flow of compressible viscous fluids, *J. Fluid Mech.* 555, pp. 59-80, 2006.
- [4] DC. Venerus, DJ. Bugajsky, Laminar flow in a channel. *Phys Fluids* 22:046101, 2010.
- [5] KD. Housiadas, GC. Georgiou, IG. Mamoutos, Laminar axisymmetric flow of a weakly compressible viscoelastic fluid, *Rheol Acta* doi:10.1007/s00397-011-0610-x, 2012.
- [6] K. Housiadas, GC. Georgiou, Perturbation solution of Poiseuille flow of a weakly compressible Oldroyd-B fluid. *J Non-Newton Fluid Mech* 166, pp. 73-92, 2011.
- [7] P. Lallemand, L.-S. Luo, Theory of the lattice Boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability, *Phys. Rev. E* 61, pp. 6546-6562, 2000.
- [8] Z.Y. Guo, X.B. Wu, Further study on compressibility effects on the gas flow and heat transfer in a microtube, *Microscale Thermophys. Eng.* 2, pp. 111-120, 1998.