

Approche Micro-mécanique Simplifiée de l'Inclusion Viscoélastique Enrobée

E. BOULHABA¹, R. KOUDANE², H. OUADFEL³

1. Equipe Mathématiques, Informatique et Mécanique (MIM) à l'ENSAO, boulhafa.elmahdi@gmail.com

2. Equipe Mathématiques, Informatique et Mécanique (MIM) à l'ENSAO, redkoudane@gmail.com

3. Equipe Mathématiques, Informatique et Mécanique (MIM) à l'ENSAO, h.ouadfel@gmail.com

Résumé

Le présent travail porte sur la résolution analytique du problème de l'inclusion viscoélastique enrobée dans une matrice viscoélastique.

L'enrobage étant considéré comme une couche mince dont les propriétés viscoélastiques sont différentes de celles de l'inclusion et de la matrice.

La résolution de ce problème sera basée simultanément sur la technique des fonctions de Green ainsi que l'opérateur d'interface. L'expression analytique de la solution est obtenue en supposant l'isotropie de la matrice ainsi que la forme sphérique des inclusions enrobées.

On utilise ces résultats pour déterminer les propriétés effectives d'un milieu hétérogène à partir d'une approche autocohérente prenant en compte les interactions entre inclusions enrobées et le milieu homogène équivalent.

Mots clés : viscoélastique ; matériau hétérogène ; inclusions enrobées ; Approche auto-cohérente.

1 Introduction

Le problème d'inclusion enrobée dans une matrice a été abordé par plusieurs auteurs depuis plusieurs années dans des buts différents [1, 2, 3, 4]. Récemment, L. Wu et S. Pan [5] ont développé un modèle pour déterminer des bornes pour délimiter la perméabilité magnétique effective d'un composite hétérogène avec inclusions enrobées. D'autres approches [6, 8, 9] basées sur la technique de la fonction de Green ont permis le calcul de la solution du problème élastique.

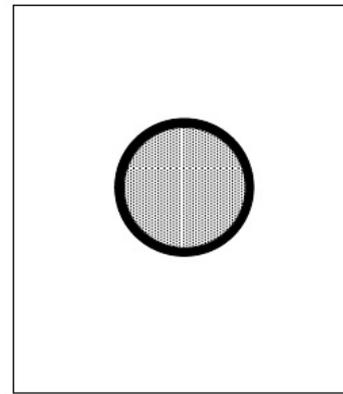
Le but principal de cet article est de traiter le comportement d'un matériau hétérogène visco-élastique linéaire composé d'une matrice viscoélastique infinie contenant des inclusions enrobées.

2 Modélisation Micro-mécanique

2.1 Équation intégrale du problème

Une inclusion sphérique dont les caractéristiques mécaniques sont μ^I, η^I de volume V_I enrobée d'une couche

de caractéristiques μ^c et η^c de volume V_c est placée dans une matrice infinie dont les caractéristiques sont μ^0, η^0 .



□ Matrice : μ^0, η^0 ▨ Inclusion : μ^I, η^I ■ Enrobage : μ^c, η^c

Résoudre ce problème consiste en la détermination de la vitesse de déformation dans l'inclusion ainsi que dans l'enrobage.

Dans le but d'obtenir des résultats simples, on va considérer le cas des matériaux isotropes incompressibles dont le comportement est de type Maxwell, sous petites déformations.

Ainsi, et d'après le paragraphe précédent on obtient pour les trois phases :

$$\dot{S}_{ij}^c = 2\mu^c \dot{\epsilon}_{ij}^c - \frac{\mu^c}{\eta^c} S_{ij}^c \text{ (Enrobage)} \quad (1)$$

$$\dot{S}_{ij}^I = 2\mu^I \dot{\epsilon}_{ij}^I - \frac{\mu^I}{\eta^I} S_{ij}^I \text{ (Inclusion)} \quad (2)$$

$$\dot{S}_{ij}^0 = 2\mu^0 \dot{E}_{ij} - \frac{\mu^0}{\eta^0} \bar{S}_{ij} \text{ (Matrice)} \quad (3)$$

La démarche est la suivante :

On impose à la matrice une vitesse de déformation macroscopique, et on cherche à connaître la vitesse de déformation dans l'inclusion enrobée.

Dans la théorie des petites déformations, l'équation d'équilibre se traduit en l'absence des forces de volume

par :

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad (4)$$

Les modules de cisaillement locaux $\mu(\mathbf{r})$ peuvent être décomposés en modules de cisaillement uniformes μ_0 du milieu de référence infini et en partie fluctuante $\delta\mu(\mathbf{r})$ due à l'inclusion enrobée non homogène :

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 + \delta\mu(\mathbf{r}) \quad (5)$$

Introduisons $b(\mathbf{r}) = \frac{\mu(\mathbf{r})}{\eta(\mathbf{r})}$. De la même façon nous allons procéder pour décomposer $b(\mathbf{r})$ en une partie uniforme et une autre fluctuante :

$$b(\mathbf{r}) = b_0 + \delta b(\mathbf{r}) \quad (6)$$

Le gradient de vitesse de déplacement est obtenu à partir du gradient de vitesse de déplacement macroscopique par l'équation intégrale suivante :

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r}) = \dot{E}_{ij}^0 + \int_v \Gamma_{ijkl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [2\delta\mu(\mathbf{r}')\dot{\epsilon}_{kl}(\mathbf{r}') - \delta b(\mathbf{r}')S_{kl}(\mathbf{r}')] dv' \quad (7)$$

Avec $\underline{\Gamma}$ le tenseur de Green modifié. Dans le présent cas, il est adéquat de poser :

$$\delta\mu(\mathbf{r}) = \Delta\mu^I\theta^I(\mathbf{r}) + \Delta\mu^c\theta^c(\mathbf{r}) \quad (8)$$

$$\delta b(\mathbf{r}) = \Delta b^I\theta^I(\mathbf{r}) + \Delta b^c\theta^c(\mathbf{r}) \quad (9)$$

Avec : $\Delta X^* = X^* - X^0$ pour $X = \{\mu, b\}$

$$\theta^1(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V_I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \theta^2(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

$$\theta^c(\mathbf{r}) = \theta^2(\mathbf{r}) - \theta^1(\mathbf{r})$$

En combinant les équations (8), (9) et (10) l'équation (7) devient :

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r}) = \dot{E}_{ij}^0 + \int_{v_I} \Gamma_{ijkl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [2\Delta\mu^I\dot{\epsilon}_{kl}(\mathbf{r}') - \Delta b^I S_{kl}] dv' + \int_{v_c} \Gamma_{ijkl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [2\Delta\mu^c\dot{\epsilon}_{kl}(\mathbf{r}') - \Delta b^c S_{kl}(\mathbf{r}')] dv' \quad (11)$$

2.2 Solution du problème

Pour bien évaluer le champ local, nous introduisons la moyenne suivante :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^* = \frac{1}{V_*} \int_{V_*} \dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r}) dv \text{ pour } * = \{I, c, 2\}$$

et

$$A_{ij}^* = 2\Delta\mu^*\dot{\epsilon}_{ij}^* - \Delta b^* S_{ij}^* \text{ pour } * = \{I, c\}$$

Appliquons la moyenne sur l'inclusion enrobée :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^2 = \dot{E}_{ij}^0 + \frac{1}{V_2} \int_{v_2} \int_{v_I} \Gamma_{ijkl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_{kl}^I dv' dv + \frac{1}{V_2} \int_{v_2} \int_{v_c} \Gamma_{ijkl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_{kl}^c dv' dv \quad (12)$$

En introduisant les deux tenseurs suivants :

$$\Gamma_{ijkl}^o = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_1} \Gamma_{ijkl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' dv \quad (13)$$

$$\Gamma_{ijkl}^* = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_2} \Gamma_{ijkl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' dv \quad (14)$$

On peut simplifier l'écriture de l'équation (15) :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^2 = \dot{E}_{ij}^0 + \Gamma_{ijkl}^o A_{kl}^I + [\Gamma_{ijkl}^* - \Gamma_{ijkl}^o] A_{kl}^c \quad (15)$$

avec

$$\Gamma_{ijkl}^o = \frac{V_1}{V_2} \Gamma_{ijkl}^*$$

Or, la relation d'auto cohérence sur l'inclusion et son enrobage est donné par :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^2 = \frac{V_I}{V_2} \dot{\epsilon}_{ij}^I + \frac{V_c}{V_2} \dot{\epsilon}_{ij}^c \quad (16)$$

En substituant l'équation (18) dans l'équation (19) nous obtenons :

$$\frac{V_I}{V_2} [I_{ijkl} - \Gamma_{ijkl}^* 2\Delta\mu^I] \dot{\epsilon}_{kl}^I + \frac{V_c}{V_2} [I_{ijkl} - \Gamma_{ijkl}^* 2\Delta\mu^c] \dot{\epsilon}_{kl}^c + \Gamma_{ijkl}^* \left[\frac{V_I}{V_2} \Delta b^I S_{kl}^I + \frac{V_c}{V_2} \Delta b^c S_{kl}^c \right] = \dot{E}_{ij}^0 \quad (17)$$

2.3 Opérateur d'Interface

Le champ de contraintes dans la couche enrobée varie de manière complexe. De plus, il existe une discontinuité des champs $\underline{\sigma}$ et $\underline{\epsilon}$ au passage d'une interface. Lorsque l'épaisseur de l'enrobage est faible, on peut admettre raisonnablement que les champs $\underline{\sigma}$ ou (et) $\underline{\epsilon}$ sont uniformes selon l'épaisseur de la couche, si bien que l'on peut relier les vitesses de déformations de part et d'autre de l'interface à partir d'une formulation simplifiée des équations de champ [7, 8, 9].

la vitesse de déformation à travers l'interface est donnée

par :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^c(\mathbf{r}^+) &= \dot{\epsilon}_{ij}^I(\mathbf{r}^-) + P_{ijkl}(\mathbf{n}, \underline{L}^c) \Delta L_{klmn}^I \dot{\epsilon}_{mn}^I(\mathbf{r}^-) \\ &+ P_{ijkl}(\mathbf{n}, \underline{L}^c) [b^c S_{kl}^c - b^I S_{kl}^I] \end{aligned} \quad (18)$$

avec

$$\Delta L_{ijkl}^I = 2(\mu^I - \mu^c) I_{ijkl}$$

la moyenne de la vitesse de déformation dans l'enrobage donne :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^c &= \dot{\epsilon}_{ij}^I + \left[\frac{1}{V_c} \int_{V_c} P_{ijkl}(\mathbf{n}, \underline{L}^c) d\mathbf{r} \right] \Delta L_{klmn}^I \dot{\epsilon}_{mn}^I \\ &+ \left[\frac{1}{V_c} \int_{V_c} P_{ijkl}(\mathbf{n}, \underline{L}^c) d\mathbf{r} \right] (b^c S_{kl}^c - b^I S_{kl}^I) \end{aligned} \quad (19)$$

posons

$$\Gamma_{ijkl}^+ = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} P_{ijkl}(\mathbf{n}, \underline{L}^c) d\mathbf{r}$$

ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^c &= [I_{ijkl} + \Gamma_{ijkl}^+ \Delta L_{klmn}^I] \dot{\epsilon}_{mn}^I \\ &+ \Gamma_{ijkl}^+ (b^c S_{kl}^c - b^I S_{kl}^I) \end{aligned} \quad (20)$$

l'équation (17) et l'équation (20) représentent un système permettant de trouver $\dot{\epsilon}_{ij}^I$ et $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ en fonction de \dot{E}_{ij}^0 . Il est à noter que pour une inclusion sphérique, viscoélastique linéaire, isotrope et incompressible [10], on a :

$$\Gamma_{ijkl}^* = \frac{-1}{5\mu^0} \left[I_{ijkl} - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{3} \right]$$

et

$$\Gamma_{ijkl}^+ = \frac{1}{5\mu^c} \left[I_{ijkl} - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{3} \right]$$

ce qui donnera par la suite le système suivant :

$$\begin{cases} f_I (2\mu^I + 3\mu^0) \dot{\epsilon}_{ij}^I + f_c (2\mu^c + 3\mu^0) \dot{\epsilon}_{ij}^c - \\ f_I \Delta b^I S_{ij}^I - f_c \Delta b^c S_{ij}^c = 5\mu^0 \dot{E}_{ij}^0 \\ (2\mu^I + 3\mu^c) \dot{\epsilon}_{ij}^I + (b^c S_{ij}^c - b^I S_{ij}^I) = 5\mu^c \dot{\epsilon}_{ij}^c \end{cases}$$

On a les cas particuliers suivants :

- $\mu^c = \mu^I$ et $\eta^c = \eta^I$: Problème de l'inclusion viscoélastique dans une matrice viscoélastique [10]
- $\eta^c \rightarrow \infty$ et $\eta^I \rightarrow \infty$: Problème de l'inclusion élastique enrobée dans une matrice élastique [8, 9]

Pour ces cas particuliers, les résultats trouvés dans notre

formulation sont exactement les mêmes que ceux trouvés par les auteurs en question.

3 Conclusion

Une approche micro-mécanique simplifiée du problème de l'inclusion enrobée en comportement visco-élastique a été élaborée. Cette approche est basée sur la technique des fonctions de Green.

Les résultats de cette approche sont en parfaite adéquation à la fois avec les résultats obtenus pour le problème de l'inclusion enrobée dans une matrice en comportement élastique, et avec le problème de l'inclusion sans enrobage dans une matrice en comportement viscoélastique.

Références

- [1] G. J. Weng, *Vol.9*, Int. J. of Plas. (1993) 181.
- [2] B. A. Bilby, J.D. Eshelby & A. K. Kundu *Vol. 28*, Tectonophysics (1975) p. 265.
- [3] I.C. Howard & P.Brierley, *Vol. 14*, Int. J. Engen. Sci. (1976) p. 1151.
- [4] P.Gilormoni & F.Montheillet, *Vol. 37, N2*, J. Mech. Phs. Solids (1986) p. 97.
- [5] L. Wu, S. Pan, *Bounds on effective magnetic permeability of three-phase composites with coated spherical inclusions*, Composites Science and Technology (2012) 1443-1450.
- [6] N. Bonfoh, V. Hounkpati, *New micromechanical approach of the coated inclusion problem : exact solution and applications*, Computational Materials Science (2012) 175–183.
- [7] R. Hill, *Interfacial Operators in the mechanics of composite media*, J. Mech. Phys. Solids 31 (1983).
- [8] M. Cherkaoui, H. Sabar et M. Berveiller, *Approche micromécanique de l'inclusion enrobée et applications aux matériaux composites*, J. Phys. III Franc-e 4, 719-732 (1994).
- [9] M. El Mouden, M. Cherkaoui, A. Molinari, M. Berveiller, *The overall elastic response of materials containing coated inclusions in a periodic array*, International Journal of Engineering Science 36 (1998) 813-829.
- [10] R. Kouddane, A. Molinari et G.R. Canova, *Self-consistent modelling of heterogeneous viscoelastic and elastoviscoplastic materials*, Mecamat (1991) 129.