

INSTABILITÉ DE FARADAY EN CELLULE DE HELE-SHAW AVEC OSCILLATIONS À DEUX FRÉQUENCES INCOMMENSURABLES

M. YAGOUBI¹, S. ANISS¹ et M. SOUHAR²

1. Université Hassan II, Faculté des sciences Ain Chock, Laboratoire de mécanique, Km 8 route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc + med.yagoubi@gmail.com
2. Lemta, UMR CNRS 7563, EnseM, 2 avenue de la Forêt de Haye, B.P. 160, Vandoeuvre-Lès-Nancy 54504, France

Résumé :

Dans ce travail, nous étudions l'influence des oscillations avec deux fréquences incommensurables sur le seuil de l'instabilité au sein d'une couche fluide confinée dans une cellule de Hele-Shaw. Nous examinons l'oscillateur de Mathieu quasi-périodique avec un terme de frottement à partir des équations de l'hydrodynamique en approximation de Hele-Shaw. En utilisant la méthode des balances harmoniques qui mène aux déterminants de Hill, nous avons pu déterminer les courbes de stabilité marginale et par la suite l'amplitude réduite de forçage critique et le nombre d'onde critique correspondant. La comparaison entre cette méthode et l'intégration numérique a montré un bon accord entre les résultats de ces deux méthodes. Nous montrons que la modulation avec deux fréquences incommensurables produit un effet stabilisant ou déstabilisant selon le rapport des fréquences.

Mots clés : *Cellule de Hele-Shaw, Faraday, stabilité, méthode des balances harmoniques.*

1 Introduction

En hydrodynamique, le premier problème ayant eu un rapport direct avec les instabilités paramétriques fut abordé expérimentalement par Faraday (1831) [1]. Ce problème a été étudié théoriquement et expérimentalement en cellule de Hele-Shaw et en absence de tension superficielle par Rajchenbach et *al.* [2]. Les travaux expérimentaux ont été menés dans le cas où un fluide Newtonien à surface libre est confiné dans une cellule de Hele-Shaw, soumise à des vibrations verticales de grandes amplitudes, ce qui signifie que la hauteur des vagues est du même ordre de grandeur ou plus grande que les longueurs caractéristiques du problème, longueur d'onde et épaisseur de la couche fluide. Les résultats ont montré que dans cette configuration, de nouveaux types d'ondes solitaires et stationnaires peuvent apparaître à la surface de l'eau. Les auteurs ont aussi réalisé une étude théorique permettant de comprendre l'existence d'un phénomène d'hystérésis pour le seuil d'instabilité correspondant à l'apparition des vagues en profondeur infinie. Dans

ce travail, nous élargissons l'étude effectuée dans [2], en considérant des oscillations quasi-périodiques, et en prenant en compte les effets dus à la tension superficielle et à la hauteur de la couche fluide dont on n'a pas tenu compte dans [2]. Nous étudions essentiellement alors l'influence de ce type d'oscillation sur le seuil de l'instabilité correspondant à l'apparition des ondes à la surface du fluide. Notons ici que la dynamique est bidimensionnelle. Cependant, pour un interstice suffisamment faible, nous pouvons considérer que l'écoulement dans la cellule est l'analogue bidimensionnel d'un écoulement dans un milieu poreux. L'étude que nous présentons alors peut servir de modèle théorique pour étudier l'effet des oscillations quasi-périodiques sur le déclenchement de l'instabilité en milieu poreux.

2 Système hydrodynamique

Nous considérons une couche fluide Newtonienne, de hauteur $h = 1$ cm, confinée verticalement dans une cellule de Hele-Shaw. Il s'agit d'une cavité dont l'épaisseur horizontale $e = 1$ mm, dans laquelle est confiné le fluide, est très faible comparée à la hauteur de remplissage, h , et à la longueur horizontale, L , de la cellule. La cellule utilisée est ensuite soumise à des oscillations quasi-périodiques selon la loi de déplacement.

$$z(t) = \alpha_1 \cos(\Omega_1 t) + \alpha_2 \cos(\Omega_2 t) \quad (1)$$

Les fréquences Ω_1 et Ω_2 sont considérées incommensurables, c'est-à-dire leur rapport est un nombre irrationnel. Les quantités α_1 et α_2 représentent les amplitudes du mouvement oscillatoire. Le fluide est donc soumis à deux forces volumiques : la force de pesanteur $-\rho g$ et la force quasi-périodique $\rho[\alpha_1 \Omega_1^2 \cos(\Omega_1 t) + \alpha_2 \Omega_2^2 \cos(\Omega_2 t)]\mathbf{k}$ où \mathbf{k} représente le vecteur unitaire ascendant et ρ est la masse volumique du fluide. Le déplacement de la surface libre du fluide par rapport à sa position de repos est défini par la fonction $\xi(x, t)$. Les équations de base du problème sont l'équation de Navier-Stokes ainsi que la condition d'incompressibilité. Ces équations de conservation sont écrites dans un repère relatif lié à la cellule et forment un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \tilde{g} \mathbf{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3)$$

où $\mathbf{V}(U, V, W)$ est le champ de vitesse qui dépend des variables spatiales x, y, z et du temps t , $\tilde{g} = g [1 - F(\cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t))]$ est l'accélération du liquide dans le référentiel lié à la cellule. Nous considérons que $\alpha_1 \Omega_1^2 = \alpha_2 \Omega_2^2 = a$. Nous désignons par p la pression et ν est la viscosité cinématique. Par la suite, $F = a/g$ représentera l'amplitude, adimensionnelle, du forçage. En géométrie de Hele-Shaw, il est utile d'introduire le champ de vitesse $\mathbf{u}(x, z, t)$ de l'écoulement moyenné dans l'épaisseur, e , qui sépare les parois verticales. La moyenne \mathbf{u} est calculée en supposant que le profil de vitesse est parabolique dans l'intervalle e (profil de Poiseuille). Le champ de vitesse s'écrit :

$$U = \left(\frac{3}{2} - \frac{6y^2}{e^2} \right) u(x, z), \quad W = \left(\frac{3}{2} - \frac{6y^2}{e^2} \right) w(x, z)$$

Nous intégrons maintenant l'équation de Navier-Stokes entre les parois frontales, entre $-\frac{e}{2}$ et $\frac{e}{2}$, on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Gamma(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \tilde{g} \mathbf{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \gamma \mathbf{u} \quad (4)$$

où $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\gamma = 12\nu/e^2$ est le terme de dissipation et Γ est le facteur de forme de vitesse, $\Gamma = 1$ si l'écoulement est uniforme dans la direction y , $\Gamma > 1$ dans les autres cas. Ici $\Gamma = 6/5$. Dans l'équation (4), le terme habituel de diffusion visqueuse $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ apparaît négligeable comparé à $\gamma \mathbf{u}$. En effet, l'essentiel de la dissipation visqueuse se produit dans la direction normale aux parois, et pour les longueurs d'onde étudiées, le temps d'atténuation γ^{-1} est très faible devant le temps de diffusion visqueuse $(\nu k^2)^{-1}$ associé au terme $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$. L'écoulement est supposé irrotationnel en régime permanent, et considérant par conséquent que le champ de vitesse \mathbf{u} dérive d'un potentiel $\phi(x, z, t)$ dans l'approximation d'incompressibilité. On peut alors intégrer l'équation (4) et la réécrire sous la forme d'une équation de Bernoulli dynamique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{3}{5}(\nabla \phi)^2 + \gamma \phi + \tilde{g}z = 0 \quad (5)$$

L'incompressibilité du fluide donne alors une équation de Laplace pour le potentiel des vitesses :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{pour} \quad -h \leq z \leq \xi \quad (6)$$

Pour fermer ce système d'équations, il convient maintenant d'introduire les conditions aux limites. La condition d'imperméabilité au fond de la cellule s'écrit :

$$w = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \quad (7)$$

La condition cinématique à la surface libre s'écrit sous sa forme linéaire par :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (8)$$

En négligeant les termes visqueux, la contrainte normale à la surface libre, sous sa forme linéaire, est :

$$p = -\sigma \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \quad (9)$$

où σ est la tension superficielle. En insérant l'équation (9) dans l'équation (5) et en éliminant les termes d'ordre supérieur à un, on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \gamma \phi + \tilde{g} \xi = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (10)$$

Cherchons une solution de l'équation (6), en modes normaux, en posant :

$$\phi = K(t)g(z)e^{ikx}, \quad \xi(x, t) = \zeta(t)e^{ikx} \quad (11)$$

En utilisant les conditions aux limites, nous obtenons une nouvelle expression de ϕ qui s'écrit en $z = 0$:

$$\phi = \frac{d\zeta}{dt} \frac{1}{k \tanh(kh)} e^{ikx} \quad (12)$$

En remplaçant les expressions de ξ et ϕ dans l'équation (10) et en faisant le changement de variable $\tau = \Omega_1 t$, nous obtenons l'équation de Mathieu quasi-périodique avec un terme de frottement, similaire à celle étudiée par Rand *et al.* [3] et par Zounes *et al.* [4] :

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + 2\mu \frac{d\zeta}{d\tau} + [\delta + \epsilon(\cos(\tau) + \cos(\omega\tau))] \zeta = 0 \quad (13)$$

$$\delta = \frac{gk \tanh(kh)}{\Omega_1^2} \left(\frac{\sigma}{\rho g} k^2 + 1 \right), \quad \epsilon = -\frac{Fgk \tanh(kh)}{\Omega_1^2}$$

Le terme, $\mu = \gamma/2\Omega_1$, est le coefficient d'amortissement et $\omega = \Omega_2/\Omega_1$ est le rapport des fréquences. Ici la théorie de Floquet n'est plus applicable pour déterminer les solutions de l'équation (13). Rand *et al.* [3] et Zounes *et al.* [4] ont proposé la construction de solutions quasi-périodiques sous la forme :

$$\zeta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[A_{n,m} \cos \frac{n+m\omega}{2} \tau + B_{n,m} \sin \frac{n+m\omega}{2} \tau \right]$$

Par la suite cette expression est introduite dans l'équation (13). Les résultats que nous allons exploiter sont obtenus par une troncature des sommes infinies en considérant des sommes de 0 à N pour l'indice n et de $-N$ à N pour l'indice m . Dans la suite de ce travail, nous allons considérer le cas $N = 4$, le système correspondant est d'ordre 41. L'analyse est facilitée en transformant le système en un système triangulaire supérieur.

Le principe de la seconde procédure de la détermination des courbes de stabilité marginale, se réalise dans un ordinateur essentiellement par des nombres rationnels. Par la suite, nous utilisons une approximation qui consiste à rendre un nombre irrationnel, ω , en un nombre rationnel sous la forme $\omega = p/q$, où p et q sont des nombres entiers premiers. Par un changement de variable $\tau = 2q\tau'$,

l'équation de Mathieu quasi-périodique (13) devient :

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau'^2} + 2\mu q \frac{d\zeta}{d\tau'} + 4q^2 [\delta + \epsilon(\cos(2q\tau') + \cos(2p\tau'))]\zeta = 0$$

Cette équation est alors résolue en utilisant l'intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre de la même manière que le travail de Zounes et Rand [4].

3 Résultats et discussion

Les courbes de stabilité marginale, amplitude réduite de forçage a_c/g en fonction du nombre d'onde k , sont déterminées en utilisant la méthode des balances harmoniques et l'intégration numérique. Ces courbes sont tracées en fixant la fréquence d'excitation, Ω_1 , le rapport des fréquences, ω , l'accélération de la gravité, $g = 981 \text{ cm s}^{-2}$, et les propriétés du fluide utilisé, soit $\sigma = 72 \text{ g s}^{-2}$ et $\rho = 1 \text{ g m}^{-3}$. Par la suite, nous mettons l'accent sur les courbes correspondantes à l'amplitude de forçage réduite critique, a_c/g et au nombre d'onde critique, k_c , en fonction de la fréquence de forçage, Ω_1 , pour différentes valeurs du rapport irrationnel des fréquences, ω .

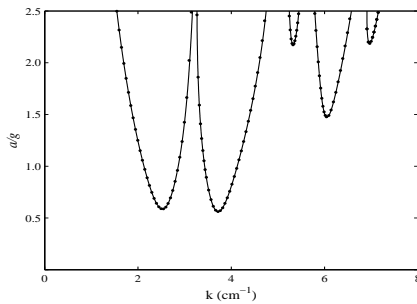


FIGURE 1: Régions instables déterminées par la méthode des balances harmoniques et comparées avec l'intégration numérique pour une interface eau-air, $\omega = \sqrt{2}$ et $\Omega_1 = 120 \text{ Hz}$. Les points sont déterminés numériquement tandis que les lignes sont obtenues par la méthode des balances harmoniques.

La figure 1 illustre les courbes de stabilité marginale, amplitude réduite de forçage en fonction du nombre d'onde pour $\omega = \sqrt{2}$ et $\Omega_1 = 120 \text{ Hz}$. La comparaison entre la méthode des balances harmoniques et l'intégration numérique montre un très bon accord. En effet, les courbes analytiques et numériques de l'instabilité sont les mêmes. Les écarts relatifs sont échelonnés entre 0.01 % et 2 %.

La figure 2 illustre l'évolution de l'amplitude de forçage critique, a_c/g , en fonction de la fréquence dimensionnelle, Ω_1 , pour différentes valeurs du rapport des fréquences ω . La modulation avec deux fréquences incommensurables donne lieu à deux effets stabilisant et déstabilisant. Notons que pour les basses fréquences, concernant Ω_1 , l'amplitude de forçage critique diminue lorsque ω augmente. Dans ce cas, le rapport des fréquences joue un rôle déstabilisant. En revanche, pour les hautes fréquences, l'amplitude critique, a_c/g croît avec ω et donc l'effet stabilisant s'accroît. Notons ici, pour les hautes fréquences, que lorsque ω est supérieure à $\sqrt{2}$, le rapport des fréquences n'a aucun effet sur le seuil de l'instabilité.

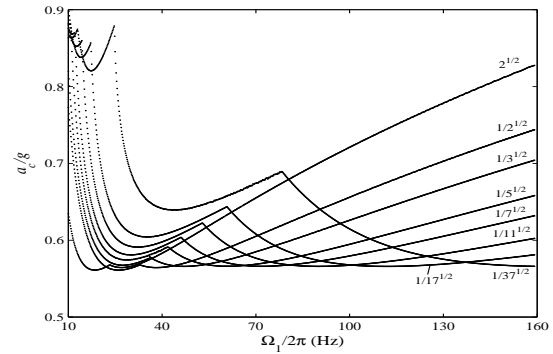


FIGURE 2: Evolution de l'amplitude réduite de forçage critique, a_c/g , en fonction de la fréquence dimensionnelle Ω_1 pour une interface eau-air et pour différentes valeurs du rapport irrationnel ω .

Sur la figure 3, nous présentons l'influence de la fréquence d'excitation, Ω_1 , sur la variation du nombre d'onde critique, k_c , pour différentes valeurs irrationnelles du rapport des fréquences. Nous observons que, pour une fréquence fixée Ω_1 , le nombre d'onde critique croît lorsque ω augmente. L'évolution du nombre d'onde critique est caractérisée toujours par des phénomènes de saut

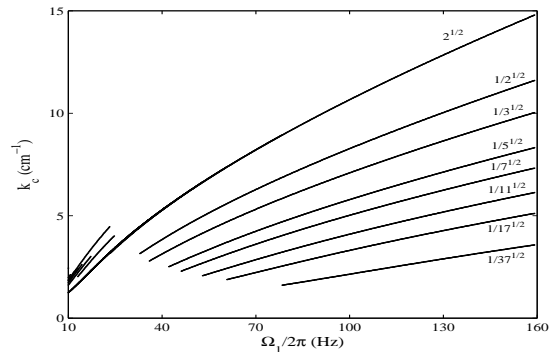


FIGURE 3: Evolution du nombre d'onde critique, k_c , en fonction de la fréquence dimensionnelle Ω_1 pour une interface eau-air et pour différentes valeurs du rapport irrationnel ω .

4 Conclusion

Nous avons étudié l'instabilité de Faraday dans le cas d'une couche fluide confinée dans une cellule de Hele-Shaw et soumise à des oscillations à deux fréquences incommensurables. La comparaison entre les résultats de la méthode des balances harmoniques et celle de l'intégration numérique a montré une bonne concordance. Nous avons montré, pour les basses fréquences, que le rapport irrationnel des fréquences a un effet déstabilisant par contre il joue un rôle de stabilisation pour les hautes fréquences.

<https://cmm2017.sciencesconf.org/>

Références

- [1] M. Faraday, *On the Forms and States Assumed by Fluids in Contact with Vibrating Elastic Surfaces*, R. Soc. Lond., **121** (1831), 319-340.
- [2] J. Rajchenbach, A. Leroux and D. Clamond, *New Standing Solitary Waves in Water*, Phys. Rev. Lett., **107** (2011), 024502.
- [3] R. Rand, R. R. Zounes and R. Hastings, *Dynamics of a Quasiperiodically Forced Mathieu Oscillator*, Chap. 9 in *Nonlinear Dynamics : The Richard Rand 50th Anniversary Volume*, edited by A. Guran (1997)
- [4] R. S. Zounes and R. Rand, *Transition Curves for the Quasiperiodic Mathieu Equation*, SIAM J. Appl. Math., **58** (1998), 1094-1115.