

Etude de stabilité linéaire d'écoulement pulsé en géométrie de Taylor-Couette :

Cas d'une modulation à deux fréquences

M. Riahi, S. Aniss et M.T. Ouazzani

Laboratoire de Mécanique, faculté des Sciences Ain-Chock, B.P.5366 Mâarif, Casablanca, Maroc.

mehdi_riahi@hotmail.fr

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de stabilité linéaire de l'écoulement pulsé d'une couche fluide Newtonienne confinée entre deux cylindres coaxiaux. L'écoulement de base est généré par une modulation à deux fréquences des vitesses pariétales telles que $\Omega(t) = \Omega_0 \cos(\omega_1 t) + \varepsilon \Omega_0 \cos(\omega_2 t)$. La deuxième fréquence ω_2 est supposée très grande et de faible amplitude ε . En utilisant la théorie de Floquet, la résolution du système de stabilité obtenu permet de montrer que la stabilité de cet écoulement ne dépend pas seulement de la haute fréquence ω_2 mais aussi de son déphasage, par rapport à la fréquence ordinaire ω_1 , traduit par le signe du paramètre ε .

Mots clefs : modulation périodique à deux fréquences, instabilité hydrodynamique, écoulement de Taylor-Couette, théorie de Floquet.

1. INTRODUCTION

La simplicité géométrique du système de Taylor-Couette en fait un système hydrodynamique modèle de l'étude de la transition vers la turbulence dans des systèmes confinés. L'étude de l'instabilité de cet écoulement en rotation uniforme des cylindres, intérieur et extérieur, a suscité un grand intérêt depuis les travaux initiaux de Taylor [1]. Bien que cette instabilité est aujourd'hui bien connue théoriquement et expérimentalement, des effets extérieurs peuvent être ajoutés à cet écoulement qui le rendent alors plus complexe : modulation périodiques des vitesses pariétales, fluide viscoélastique, champ magnétique, etc...

Des études récentes ont porté sur la détermination de l'effet d'une modulation périodique des vitesses pariétales à une seule fréquence sur la stabilité de l'écoulement aussi bien pour le cas d'un fluide de Newton [2,3] que pour le cas d'un fluide de Maxwell linéaire [4]. Nous nous intéressons dans ce travail à la caractérisation de l'influence d'une modulation sinusoïdale à deux fréquences des vitesses pariétales sur les paramètres critiques de stabilité.

2. ECOULEMENT DE BASE

On considère un fluide Newtonien, de densité ρ et de viscosité cinématique ν , confiné entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et $R_2 = R_1 + d$ ayant respectivement les vitesses angulaires Ω_{R1} et Ω_{R2} définies par $\Omega_{R1} = \Omega_{R2} = \Omega_0 \cos(\omega_1 t^*) + \varepsilon \Omega_0 \cos(\omega_2 t^*)$, et Ω_0 et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence de pulsation. Les deux cylindres sont considérés soumis à deux vitesses angulaires périodiques: une vitesse angulaire à fréquence ordinaire ω_1 superposée à une autre de grande fréquence ω_2 et de faible amplitude ε . Deux valeurs du paramètre ε ont été considérées : les deux vitesses angulaires sont en phase $\varepsilon > 0$; ou bien en opposition de phase $\varepsilon < 0$.

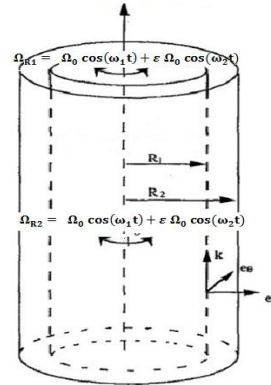


Figure 1 : Schéma de la géométrie.

Les équations régissant l'écoulement sont l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de conservation de la masse:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t^*} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

où \mathbf{u} est le vecteur vitesse et P est la pression.

Sous les hypothèses d'invariance par rotation et translation le long de l'axe des cylindres, et lorsque la largeur de l'espace annulaire d est faible devant le rayon R_1 du cylindre intérieur, la vitesse de l'écoulement de base possède une composante azimutale V_B donnée par

$$V_B(x, t) = V_{B1}(x, t) + \varepsilon V_{B2}(x, t)$$

avec

$$V_{Bi}(x, t) = V_1(x, \sigma_i) \cos(\sigma_i t) + V_2(x, \sigma_i) \sin(\sigma_i t)$$

et $x = \frac{r-R_1}{d}$ étant la coordonnée radiale adimensionnelle à l'intérieur du gap ($0 \leq x \leq 1$) et $t = \frac{t^*}{d^2/\nu}$ est le temps adimensionnel.

Les expressions de $V_1(x, \sigma_i)$ et de $V_2(x, \sigma_i)$ avec $i = 1, 2$ sont données par:

$$V_1(x, \sigma_i) = \frac{\cos(\gamma_i x) \cosh(\gamma_i(1-x)) + \cos(\gamma_i(1-x)) \cosh(\gamma_i x)}{\cos(\gamma_i) + \cosh(\gamma_i)}$$

$$V_2(x, \sigma_i) = \frac{\sin(\gamma_i x) \sinh(\gamma_i(1-x)) + \sin(\gamma_i(1-x)) \sinh(\gamma_i x)}{\cos(\gamma_i) + \cosh(\gamma_i)}$$

où $\sigma_i = \sqrt{\omega_i d^2 / \nu}$ est le nombre de fréquences adimensionnelles et $\gamma_i = \sqrt{\frac{\sigma_i}{2}}$ représente le rapport entre deux longueurs caractéristiques $\gamma_i = d/\delta_i$ tel que δ_i est l'épaisseur de la i ème couche de Stokes. Le problème considéré est un écoulement oscillant à deux vitesses de rotation sinusoïdales.

3. ANALYSE DE STABILITE LINEAIRE

Pour l'étude de la stabilité linéaire de l'écoulement de base défini précédemment, nous appliquons la procédure classique des perturbations qui consiste à superposer à cette écoulement des perturbations infinitésimales en vitesse et en pression de telle sorte que:

$$\mathbf{u} = (0, V_B, 0) + (u(x, z, t), v(x, z, t), w(x, z, t))$$

$$P = P_B + p(x, z, t)$$

Le comportement de l'écoulement perturbé est contrôlé par trois paramètres: les nombres des fréquences, σ_1 et σ_2 , et le nombre de Taylor défini par: $Ta = (R_1 \Omega_0 d / \nu) \sqrt{d/R_1}$. On considère par la suite que les perturbations s'écrivent en modes normaux:

$$(u, v, w, p) = (\tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, t), \tilde{w}(x, t), \tilde{p}(x, t)) \exp(iqz)$$

où q désigne le nombre d'onde. En éliminant la pression et la vitesse axiale, le système perturbé se réduit à:

$$\left(M - \frac{\partial}{\partial t}\right) M \tilde{u} = 2q^2 T_a^2 V_B$$

$$\left(M - \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{v} = \frac{\partial V_B}{\partial x} \tilde{v}$$

$$\text{où } M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - q^2.$$

Les conditions aux limites sont :

$$\tilde{u} = \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0 \text{ en } x=0, 1$$

Ce système associé aux conditions aux limites constitue un problème aux valeurs propres. Compte tenu du fait que les coefficients de ces équations sont des fonctions périodiques du temps, la théorie de Floquet permet de présenter la solution du problème sous la forme

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \exp(i\mu t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (u_p(x), v_p(x)) \exp(in\sigma_1 t)$$

Nous désignons l'exposant de Floquet par $\mu = \mu_0 + i\mu_1$ qui est un nombre complexe. Nous limitons notre étude à la détermination des courbes de stabilité marginale correspondant aux solutions harmoniques $\mu_0 = \mu_1 = 0$. L'écriture de la solution de base V_B sous sa forme complexe est donnée par:

$$V_B = T_1 + \varepsilon T_2$$

$$\text{avec } T_i = F_i \exp(i\sigma_i t) + F_i^* \exp(-i\sigma_i t)$$

où $F_i = F(x, \sigma_i) = \frac{1}{2}(V_1(x, \sigma_i) - iV_2(x, \sigma_i))$ et F_i^* son conjugué pour $i = \pm 1$. En substituant ces expressions dans notre système, nous obtenons une hiérarchie infinie de systèmes:

$$(D^2 - q^2 - in\sigma)(D^2 - q^2)U_n = 2q^2 T_a^2 [(F_1 + \varepsilon F_2)V_{n-1} + (F_1^* + \varepsilon F_2^*)V_{n+1}]$$

$$(D^2 - q^2 - in\sigma)V_n = \left(\left(\frac{dF_1}{dx} + \varepsilon \frac{dF_2}{dx} \right) U_{n-1} + \left(\frac{dF_1^*}{dx} + \varepsilon \frac{dF_2^*}{dx} \right) U_{n+1} \right)$$

où $D = \frac{d}{dx}$. Les conditions aux limites associées sont :

$$u_n = v_n = Du_n = 0 \quad \text{en } x = 0$$

Ce système d'équations différentielles est transformé en un système d'équations différentielles du premier ordre dont les inconnues sont $u_n, Du_n, (D^2 - q^2)u_n, D(D^2 - q^2)u_n, v_n, Dv_n$. Un ensemble de solutions indépendantes vérifiant les conditions aux limites en $x=0$ sont construites à partir d'un schéma numérique de Runge-Kutta du quatrième ordre, une combinaison linéaire de ces solutions satisfaisant les conditions aux limites en $x=1$, mène alors à un système algébrique homogène dont les inconnues sont les coefficients d'une telle combinaison. Une condition nécessaire d'existence de solutions non nulles est que le déterminant de ce système homogène soit nul. Ceci mène à une relation de dispersion de la forme:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, q, T_a, \Gamma) = 0$$

4. RESULTATS ET ANALYSES

Nous présentons sur la figure 2 l'évolution du nombre de Taylor critique en fonction de la fréquence γ_1 pour différentes valeurs du rapport d'amplitude ε et lorsque la

haute fréquence $\gamma_2 = 12$. Nous constatons d'après cette figure que l'écoulement tend vers une configuration stable pour les grandes valeurs de la fréquence γ_1 . De plus, une possibilité de contrôle de cette instabilité est observée pour les hautes fréquences lorsque le rapport d'amplitude des deux fréquences, ε , est différent de zéro. En effet, un effet stabilisant de la haute fréquence γ_2 est obtenu lorsque celle-ci est en déphasage avec la fréquence ordinaire, $\varepsilon < 0$, contrairement au cas lorsque les fréquences sont en phase, $\varepsilon > 0$, ou un effet déstabilisant de γ_2 est observé.

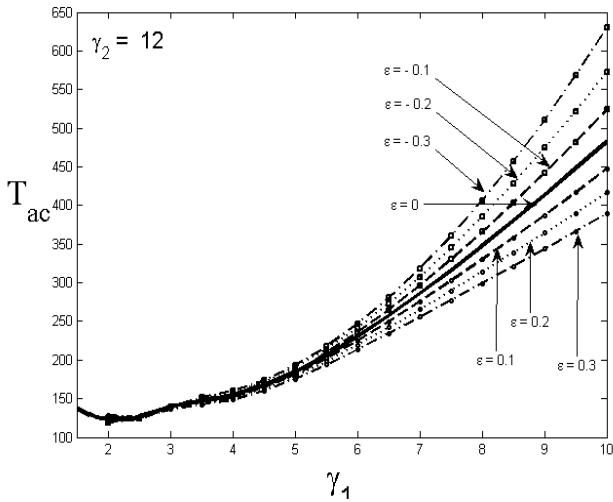


Figure 2 : Evolution du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de fréquence γ_1 pour $\gamma_2 = 12$.

Ces effets stabilisant et déstabilisant deviennent de plus en plus accentués lorsque la haute fréquence diminue comme c'est illustré dans la figure 3 pour $\gamma_2 = 10$ et dans la figure 4 pour $\gamma_2 = 8$. En outre, la fréquence γ_2 n'a pas d'effet sur la stabilité du système pour les faibles valeurs de γ_1 .

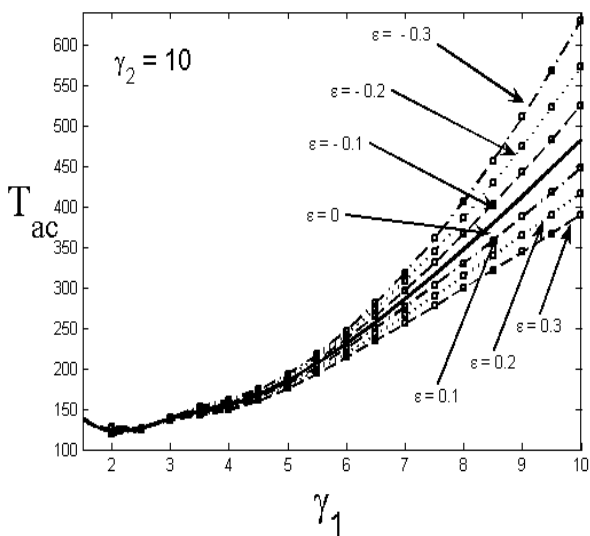


Figure 3 : Evolution du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de fréquence γ_1 pour $\gamma_2 = 10$.

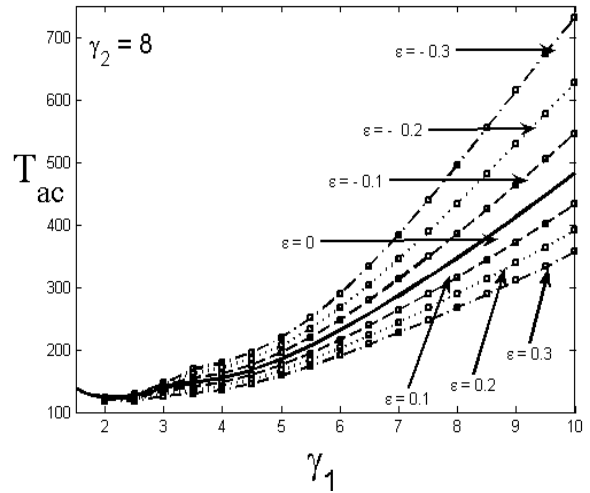


Figure 4 : Evolution du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de fréquence γ_1 pour $\gamma_2 = 8$.

Par ailleurs, la haute fréquence γ_2 n'a pas d'effet remarquable sur le nombre d'onde critique comme ceci est bien observé dans la figure 5.

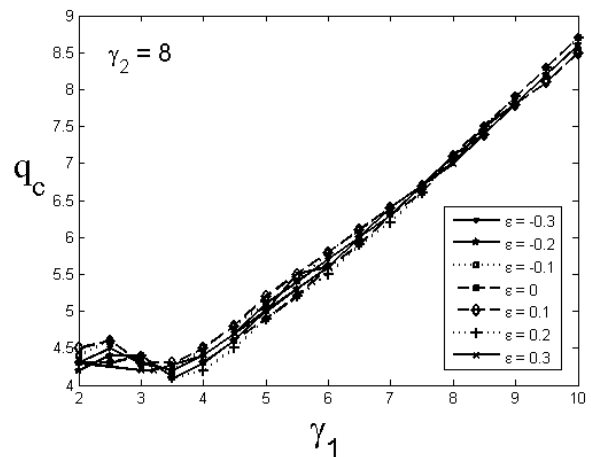


Figure 5 : Evolution du nombre d'onde critique en fonction du nombre de fréquence γ_1 pour $\gamma_2 = 8$.

REFERENCES

- [1] Taylor, G. I., "Stability of viscous liquid contained between two concentric cylinders", *Phil. Trans. Soc. A* 223, 289-343.
- [2] Aouidef A., Normand C., Stegner A., Wesfreid J.E., "Centrifugal instability of pulsed flow", *Phys. Fluids* 11 (1994) 3665-3676.
- [3] Tennakoon S.G.K, Andereck C.D., Aouidef A., Normand C., "pulsed flow between concentric rotating cylinders", *Eur. J. Mech. B-Fluid*. 16 (1997) 227-248.
- [4] Mehdi Riahi, Saïd Aniss, Mohamed Ouazzani Touhami, Salah Skali Lami., "Stability of a Pulsed Taylor-Couette Flow in a Viscoelastic Fluid", *Journal of The Society of Rheology, Japan*. Vol. 42 (2014) No. 5 p. 321-327.

