

Instabilité de Rayleigh-Bénard sous l'effet d'une modulation périodique des températures pariétales en absence du gradient stationnaire

M. Riahi, S. Aniss et M. T. Ouazzani

1. Laboratoire de Mécanique, faculté des Sciences Aïn-Chock, B.P.5366 Mâarif, Casablanca, Maroc.
mehdi_riahi@hotmail.fr

Résumé

Ce travail porte sur l'étude des effets d'une modulation en phase des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil convectif d'une couche liquide Newtonienne horizontale et d'extension infinie. Dans ce cadre, nous supposons que la température imposée aux parois inférieure et supérieure est une fonction périodique du temps avec des amplitudes différentes. Le gradient stationnaire de température est supposé nul. La théorie de Floquet combinée avec une méthode numérique transformant le problème aux valeurs propres obtenu en un problème aux conditions initiales, nous permet de mettre en évidence l'effet du rapport d'amplitudes de modulation sur le seuil critique de convection.

Mots clefs : modulation périodique, seuil de convection, théorie de Floquet.

1. Introduction

Le seuil correspondant au déclenchement du mouvement de la convection de Rayleigh-Bénard peut être contrôlé par une modulation des températures imposées sur les surfaces horizontales de la couche fluide. Ceci est réalisé en rajoutant aux conditions aux limites habituelles sur la température des composantes dépendantes du temps. Si la modulation gravitationnelle, introduit un paramètre dépendant du temps dans les équations régissant le mouvement de convection à travers les forces de volume, la modulation des conditions aux limites fait apparaître ce temps dans la solution de base; ce temps explicite dans les équations rend ces dernières non autonomes et permet, par la suite, de retarder ou d'accélérer le seuil critique de convection. Les travaux qui se sont intéressés à la modulation de température à la frontière ont toujours considéré soit une modulation périodique de température sur la paroi horizontale inférieure soit une modulation périodique de même amplitudes avec déphasage des températures imposées sur les parois horizontales inférieure et supérieure de la couche fluide[1-7]. Dans les deux cas, ces travaux ont tenu compte dans le gradient de température d'une composante stationnaire en plus d'une composante fluctuante. Dans ce travail, nous élargissons davantage les résultats de ces travaux au cas

d'une modulation en phase des conditions aux limites relatives à la température avec différents rapports d'amplitude en considérant que la composante stationnaire du gradient de température est nulle.

2. FORMULATION LINEAIRE DU PROBLEME

On considère un fluide Newtonien confiné entre deux parois horizontales d'extension infinie dans les directions x^* et y^* . Les températures imposées aux parois inférieur, en $z^* = 0$, et supérieur, en $z^* = d$, sont définies respectivement par $T_1 = T_m + T_s \cos(\omega t^*)$ et $T_2 = T_m + \varepsilon T_s \cos(\omega t^*)$ (voire figure I). Nous considérons de plus que en $T_s \ll T_m$ afin de garder constantes les caractéristiques physiques du fluide à la température ambiante T_m .

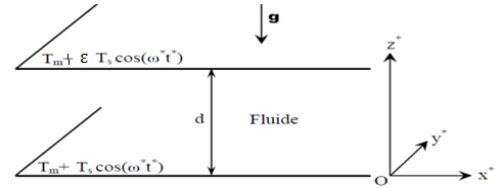


Figure I: Couche fluide horizontale d'extension infinie dans les directions x^* et y^* avec modulation en phase de la température sur la surface supérieure et inférieure.

2.1 Equations de l'équilibre

L'équilibre de la couche fluide correspond à un champ de vitesse nul et à un champ de température adimensionnel, $T_e = \frac{T^* - T_m}{T_s}$, solution de l'équation de température adimensionnelle :

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} \quad (1)$$

avec

$T_e = \cos(\omega t)$ en $z = 0$ et $T_e = \varepsilon \cos(\omega t)$ en $z = 1$ où $\omega = \omega^* d^2 / \nu$, $z = z^* / d$, $t = t^* k / d^2$; k étant la diffusivité thermique du fluide.

La solution de l'équation (1) est :

$$T_e(z, t) = T_1(z) \cos(\sigma t) + T_2(z) \sin(\sigma t)$$

avec

$$\begin{aligned} T_1(z) &= \frac{\cos(\gamma z) \cosh(\gamma(1-z)) + \varepsilon \cos(\gamma(1-z)) \cosh(\gamma z)}{\cosh(\gamma) + \varepsilon \cos(\gamma)} \\ T_2(z) &= \frac{\sin(\gamma z) \sinh(\gamma(1-z)) + \varepsilon \sin(\gamma(1-z)) \sinh(\gamma z)}{\cosh(\gamma) + \varepsilon \cos(\gamma)} \end{aligned}$$

où $\gamma = \sqrt{\frac{\sigma}{2}}$.

2.2. Equations de conservation linéarisées au voisinage de l'équilibre

Nous perturbons l'état d'équilibre en superposant à celui-ci des perturbations infinitésimales

$$p^* = p_e + p', \rho^* = \rho_e + \rho', T^* = T_e + T', \\ V^* = 0 + V^*(u^*, v^*, w^*)$$

Le système d'équations linéaire correspondant à la perturbation de l'état d'équilibre est donné par l'équation de continuité, les équations de mouvement de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur en approximation de Bousinesq:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

$$\rho_e \frac{\partial V^*}{\partial t^*} = -\nabla p' + \mu \Delta V^* + \rho_e g \beta T' \mathbf{e}_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t^*} + V^* \cdot \nabla T_e = k \Delta T' \quad (4)$$

où β et μ désignent respectivement, le coefficient de dilatation thermique et la viscosité dynamique du fluide. En introduisant les grandeurs adimensionnelles suivantes:

$$(x, y, z) = (x^*/d, y^*/d, z^*/d), t = t^* k/d^2, T = T'/T_s$$

$$\mathbf{V}(x, y, z) = V^*(u^* d/k, v^* d/k, w^* d/k)$$

où les variables non étoilées sont sans dimension et projectant verticalement le rotationnel du rotationnel de l'équation de mouvement (3) nous permet, en utilisant l'équation de continuité, de réduire le système d'équations (2) – (4) au système suivant :

$$\left(Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta w = Ra \Delta_2 T \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{\partial T_e}{\partial z} = \Delta T \quad (6)$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, Pr est le nombre de Prandtl défini par $Pr = \nu/k$. La grandeur Ra est le nombre de Rayleigh défini par $Ra = \frac{\rho g \beta T_s d^3}{\nu k}$. Au système d'équations, (5) - (6), on associe les conditions aux limites du type rigide-rigide suivantes :

$$T = w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0, 1 \quad (7)$$

3. Analyse asymptotique

3.2. Régime de basses fréquences

Dans le cas des faibles fréquences, le développement asymptotique de la température de l'équilibre, T_e , est donné par :

$$T_1(x) = 1 + x \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\sigma}{2} + O(\sigma^2),$$

$$T_2(x) = \frac{\sigma}{2} x(1-x) + \frac{1}{3} x(1-x)(1+x) \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\sigma^2}{4} \\ + O(\sigma^4)$$

En tenant compte de ce développement et en introduisant la nouvelle variable, $\tau = \sigma t$. La résolution numérique du système (8) – (9) en approximation quasi-statique, nous permet de trouver, pour le cas rigide-rigide, la loi asymptotique suivante :

$$Ra_c = 3413. \left| \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} \right| \sigma^{-1} \quad \text{et } q_c = 4. \quad (11)$$

Le cas particulier où $\varepsilon = 1$, on trouve :

$$Ra_c = 18670.99 \sigma^{-2} \quad \text{et } q_c = 4 \quad (12)$$

Pour le cas d'une modulation en opposition de phase qui correspond au cas $\varepsilon = -1$, on trouve la loi suivante :

$$Ra_c = 3413. \left| \frac{-\varepsilon+1}{\varepsilon+1} \right| \sigma^{-1} \quad \text{et } q_c = 4. \quad (13)$$

3.3. Régime de hautes fréquences

Dans cette situation, l'instabilité a lieu dans une couche de peau thermique d'épaisseur, $\delta \approx \sigma^{-\frac{1}{2}} d$ [5]. Une comparaison des différents termes de l'équation (9) permet d'obtenir une relation entre la température et la troisième composante de la vitesse, $\tilde{T} \approx \sigma^{1/2} \tilde{w}$. Tenir compte de ce résultat dans l'équation (8) où les termes de chaque membre de l'équation doivent être du même ordre, permet d'aboutir à :

$$Ra_c \approx Ra' \sigma^{3/2} \quad \text{et } q_c \approx q' \sigma^{1/2}.$$

4. Approche numérique

Le système d'équations (9)-(10) est linéaire et son second membre dépend explicitement et de façon périodique du temps. Il s'agit donc d'un système de Floquet. La théorie de Floquet permet de présenter la solution du problème sous la forme

$$(\tilde{w}, \tilde{T}) = \exp(\mu t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (U_n(x), V_n(x)) \exp(in\sigma t)$$

Nous désignons l'exposant de Floquet par $\mu = \mu_0 + i\mu_1$ qui est un nombre complexe. Nous limitons notre étude à la détermination des courbes de stabilité marginale correspondant aux solutions harmoniques $\mu_0 = \mu_1 = 0$. En substituant l'expression au dessus dans notre système, nous obtenons une hiérarchie infinie de systèmes :

$$(D^2 - q^2 - in\sigma)(D^2 - q^2)U_n = -q^2 Ra^2 V_n(x)$$

$$(D^2 - q^2 - in\sigma)V_n = \left(\frac{dF}{dz} U_{n-1} + \frac{dF^*}{dz} U_{n+1} \right)$$

où $D = \frac{\partial}{\partial x}$. Les conditions aux limites associées sont :

$$u_n = v_n = Du_n = 0 \quad \text{en } x = 0$$

Une condition nécessaire d'existence de solutions non nulles est que le déterminant de ce système homogène soit nul. Ceci mène à une relation de dispersion de la forme :

$$f(\sigma, q, T_a, \Gamma) = 0.$$

5. Résultats et discussion

Nous présentons sur la figure 2 l'évolution du nombre de Rayleigh critique, R_{ac} , en fonction de la fréquence γ pour $Pr = 7$ et pour différentes valeurs du rapport d'amplitude de modulation, ε . Nous constatons que pour les hautes et les basses fréquences le nombre de Rayleigh critique, R_{ac} , tend vers des valeurs très grandes, la couche fluide s'oriente donc vers une configuration d'équilibre stable. L'instabilité dans ces régimes de fréquences est harmonique. Cependant, la couche fluide est fortement instable pour une fréquence intermédiaire critique, $\gamma_c = 3$ dans le cas où d'une modulation de même amplitude $\varepsilon = 1$. Le nombre de Rayleigh critique, correspondant à cette fréquence, est $R_{ac} = 7474.49$ avec un nombre d'onde critique $q_c = 4$ (figures : 2 et 3). En augmentant le paramètre du rapport d'amplitude de modulation ε , ce nombre de Rayleigh critique ainsi que sa fréquence correspondantes, γ_c , diminuent. Un comportement opposé à celui-ci est observé lorsque le rapport d'amplitude de modulation ε diminue (figure 4). De plus, un saut dans les diagrammes de stabilité est observé lorsque $\gamma = 2.8$ et qui correspond à une transition du système d'une réponse harmonique à une réponse subharmonique. Le mode d'instabilité le plus dangereux dans des intervalles de fréquence $\gamma_0 \leq \gamma \leq 2.8$ est celui qui correspond à une instabilité subharmonique où γ_0 est une fréquence qui dépend de ε .

Les nombres de Rayleigh et d'onde critiques ne dépendent pas du rapport d'amplitude de modulation ε dans la limite des hautes fréquences tandis qu'ils deviennent très sensibles à ce paramètre dans la limite des basses fréquences. Il est à noter que dans le régime de hautes fréquences, l'instabilité convective apparaît dans deux couches de peau thermique, appelées couches de Stokes, le long des parois horizontales. Les expressions de ces couches, $\delta \approx \sigma^{-\frac{1}{2}} d$, ne dépendent pas du rapport d'amplitude de modulation et le nombre de Rayleigh et le nombre d'onde critiques varient respectivement en fonction de la fréquence selon les lois $Ra_c = Ra' \sigma^{3/2}$ et $q_c = q' \sigma^{1/2}$. Ces résultats numériques représentent une bonne concordance avec les résultats asymptotiques élaborés dans les régimes de basses et de hautes fréquences.

6. Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'effet d'une modulation de température aux frontières sur le seuil de

convection d'une couche fluide horizontale d'extension infinie. Cette modulation est en phase avec différents rapports d'amplitudes et la composante stationnaire du gradient de température résultant est nulle. Nous avons montré que le rapport d'amplitudes de modulation a un effet considérable sur la stabilité du système seulement pour les basses fréquences ainsi que pour les fréquences intermédiaires.

Références

- [1] Venzian G., "Effect of modulation on the onset of thermal convection. Part 2. Convective instability," J. Fluid Mech., 35, pp. 243-254 (1969).
- [2] Rosenblat S. and Herbert D. M., "Low frequency modulation of thermal instability," J. Fluid Mech., 43, part 2, pp. 385-398 (1970).
- [3] Yih C. S. and Li C. H., "Instability of unsteady flows or configurations. Part 2. Convective instability", J. Fluid Mech. 54, pp. 143-152, (1972).
- [4] K. Souhar et S. Aniss, "Effect of phase thermal modulation without stationary temperature gradient on the threshold of convection," Journal of Heat Transfer 138(10) · May 2016.

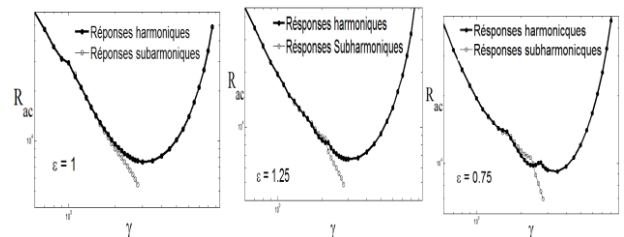


Figure 2: Diagramme de stabilité pour chaque valeur du rapport d'amplitude de modulation ε

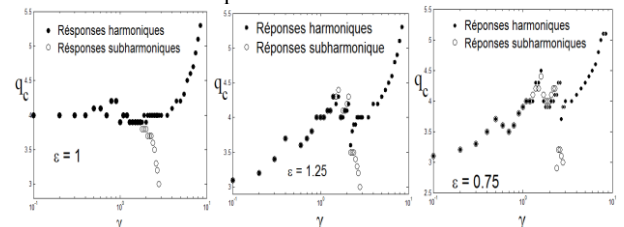


Figure 3: Evolution du nombre d'onde critique en fonction du nombre de fréquence γ pour différentes valeurs du rapport d'amplitude de modulation ε

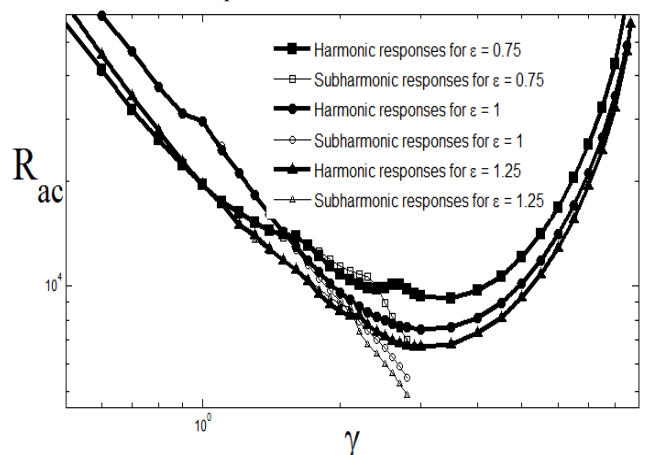


Figure 4: Diagramme de stabilité pour différentes valeurs du rapport d'amplitude ε .