

# UN MODÈLE 2D RÉDUIT POUR LES POUTRES SANDWICH SOUS COMPRESSION

K. MHADA<sup>1</sup>, B. BRAIKAT<sup>2</sup>, N. DAMIL<sup>2</sup>, M. POTIER-FERRY<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique et Énergétique LME, Faculté des Sciences d'EL Jadida, Université Chouaïb Doukkali, 'EL Jadida, Maroc. [khadijamhada1@gmail.com](mailto:khadijamhada1@gmail.com)

<sup>2</sup>Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux LIMAT, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca, Sidi Othman, Casablanca, Maroc. [b.braikat@gmail.com](mailto:b.braikat@gmail.com), [nouredine.damil@gmail.com](mailto:nouredine.damil@gmail.com)

<sup>3</sup>Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux, LEM3, UMR CNRS 7239, Université de Lorraine, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01, France. [michel.potierferry@univ-metz.fr](mailto:michel.potierferry@univ-metz.fr)

## Résumé

Nous proposons, dans ce travail, une nouvelle approche pour la modélisation des plissements locaux et du couplage entre le comportement local et global dans les structures sandwich 2D. Une analyse de Fourier à deux échelles permet ainsi de transformer un modèle sandwich 2D en un nouveau modèle sandwich 2D réduit dont seule l'enveloppe de l'instabilité est évaluée numériquement. Le modèle de Fourier à deux échelles proposé est comparé à un modèle 1D [4].

**Mots clés:** *Modèle sandwich 2D réduit, Analyse de Fourier à deux échelles, interaction Flambage local-global, Structure Sandwich 2D.*

## Introduction

Plusieurs recherches ont concerné l'étude du flambage et du post-flambement des structures sandwich [1]. L'analyse de bifurcation de type Landau-Ginzburg peut être utilisée pour étudier ces instabilités à partir d'une analyse asymptotique à double échelles. L'équation ainsi obtenue n'est valable qu'au voisinage de la bifurcation et ne permet pas de rendre compte du couplage entre un comportement non linéaire global et l'apparition des motifs localement. Une nouvelle approche a été présentée par Damil et Potier-Ferry [2] qui est basée sur le concept de série de Fourier à coefficients lentement variables. Les modèles obtenus sont compatibles avec la théorie de Landau-Ginzburg, mais ils peuvent également rester valables au-delà du point de bifurcation et tenir compte du couplage entre les instabilités globales et locales.

Dans ce travail, nous utilisons l'analyse de Fourier à double échelles pour étudier les plissements locaux et le flambage global des structures sandwich 2D. De cette façon, un modèle sandwich 2D est transformé en un nouveau modèle 2D réduit. Ce modèle sandwich 2D est ici utilisé pour l'étude de l'interaction du flambage local et du flambage global d'une poutre sandwich soumise à une charge de compression ; l'épaisseur des faces est choisie très petite devant l'épaisseur de l'âme de la poutre sandwich.

Ce nouveau modèle 2D non linéaire réduit de structures sandwich est alors résolu par la méthode asymptotique numérique (MAN) [3].

Une comparaison avec un modèle 1D basé sur une analyse de Fourier à double échelles des structures sandwich de Liu et al. [4] est proposée.

## 1. Modèle sandwich 2D

Les structures sandwich considérées sont planes et à deux dimensions avec un cœur doux et des peaux raides comme le montre la figure 1[].

En utilisant les notations dans [3] et en négligeant les forces de volume, le principe des puissances virtuelles peut être exprimé par:

$$\int_{\Omega} \langle \delta \gamma \rangle \{s\} d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega} \langle \delta u \rangle \{F_d\} ds \quad (1)$$

où  $\delta u$  est le vecteur déplacement virtuel,  $\{F_d\}$  est le vecteur de force appliquée à la frontière et  $\lambda$  est un paramètre de charge. Le vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\{s\}$ , le vecteur des déformations de Green-Lagrange  $\{\gamma\}$  et le vecteur gradient des déplacements  $\{\theta\}$  sont liés par les relations suivantes:

$$\{s\} = [D]\{\gamma\}, \quad \{\gamma\} = [H]\{\theta\} + 1/2 [A(\theta)]\{\theta\} \quad (2)$$

Les matrices  $[D]$ ,  $[H]$  et  $[A(\theta)]$  sont définies dans [3]. Les équations (1) et (2) définissent le modèle sandwich 2D.

## 2. Modèle sandwich 2D réduit

Nous considérons l'approche à double échelle basée sur le concept de séries de Fourier à coefficients lentement variables. Nous cherchons des réponses presque périodiques qui varient rapidement dans une direction. Cette direction caractéristique et la période sont décrites par un vecteur d'onde  $\{q\}$  qui est supposé donné. En pratique, ce vecteur provient d'une analyse de stabilité linéaire. Ainsi, le vecteur  $\langle \Lambda \rangle = \langle u, s, \theta, \gamma \rangle$ , qui comprend respectivement le vecteur des déplacements, le vecteur des contraintes, le vecteur gradient des déplacements et le vecteur des déformations, est recherché sous la forme d'une série de Fourier dont les coefficients  $\langle \Lambda_m \rangle = \langle u_m, s_m, \theta_m, \gamma_m \rangle$  varient lentement. Ici, nous cherchons le vecteur  $\langle \Lambda \rangle$  sous la forme suivante:

$$\langle \Lambda \rangle = \sum_{M=-\infty}^{m=+\infty} \langle \Lambda_m \rangle e^{mi\{q\}\{X\}} \quad (3)$$

On choisit le vecteur d'onde  $\{q\}$  parallèle à la direction  $\langle X \rangle = X \langle 1, 0, 0 \rangle$  du sandwich  $\{q\} = q\{X\}$ , le nombre d'onde  $q$  étant défini comme  $q = \pi/Lq_0$ , avec  $L$  est la longueur du sandwich et  $q_0$  est une longueur d'onde choisie ( $q_0 \in N, q_0 \geq 2$ ). Les inconnues réduites  $\{\Lambda_m\}$ , qui désigne l'enveloppe pour l'harmonique à

l'ordre  $m$ , varie lentement sur une période  $[X, X + 2\pi/q]$ .

Le principe des puissances virtuelles pour le modèle sandwich 2D réduit est déduit directement du principe des puissances virtuelles du modèle sandwich 2D (1). Les coefficients de Fourier de la contrainte et de la déformation vérifient:

$$\int_{\Omega} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \langle \delta \gamma_{-m} \rangle \{s_m\} d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \langle \delta u_{-m} \rangle \{f_m\} d\Omega \quad (4)$$

En se limitant à trois harmoniques  $0, \pm q$ , le principe des puissances virtuelles réduit a la même forme que le modèle sandwich 2D:

$$\int_{\Omega} \langle \delta \Gamma \rangle \{S\} d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega} \langle \delta U \rangle \{F\} d\Omega \quad (5)$$

Rappelons que chaque vecteur du modèle initial est remplacé par un vecteur de taille trois fois plus importante car ce dernier vecteur prend en compte l'harmonique 0 représenté par un vecteur réel et les harmoniques  $\pm q$  représentés par un vecteur complexe ou par deux vecteurs réels.

La définition de ces vecteurs généralisés, le vecteur des déplacements généralisé  $\{U\}$ , le vecteur des contraintes généralisée  $\{S\}$ , le vecteur des déformations généralisé  $\{\Gamma\}$ , le vecteur gradient des déplacements généralisé  $\{\Theta\}$  et le vecteur force généralisé  $\{F\}$  sont les suivants:

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \langle u_0, u_1^R, u_1^I \rangle & \langle S \rangle &= \langle s_0, s_1^R, s_1^I \rangle \\ \langle \Gamma \rangle &= \langle \gamma_0, 2\gamma_1^R, 2\gamma_1^I \rangle & \langle \Theta \rangle &= \langle \theta_0, \theta_1^R, \theta_1^I \rangle \\ \langle F \rangle &= \langle f_0, 2f_1^R, 2f_1^I \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

La loi de comportement réduite est écrite comme suit:

$$\begin{aligned} \{S\} &= [D^{gen}] \{\Gamma\} \\ \{\Gamma\} &= [H^{gen}] \{\Theta\} + 1/2 [A^{gen}(\Theta)] \{\Theta\} \end{aligned} \quad (7)$$

Les matrices qui représentent des relations linéaires sont diagonales car les couplages entre les harmoniques apparaissent uniquement pour les phénomènes non linéaires.

$$[D^{gen}] = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D}{2} \end{bmatrix}, [H^{gen}] = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & 2H & 0 \\ 0 & 0 & 2H \end{bmatrix} \quad (8)$$

Les aspects non linéaires sont pris en compte par une seule matrice donnée par:

$$[A^{gen}(\Theta)] = 2 \begin{bmatrix} \frac{A(\theta_0)}{2} & A(\theta_1^R) & A(\theta_1^I) \\ A(\theta_1^R) & A(\theta_0) & 0 \\ A(\theta_1^I) & 0 & A(\theta_0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Les équations (5) et (7) définissent le modèle sandwich 2D réduit.

### 3. Discrétisation du modèle 2D réduit

Dans le modèle sandwich réduit 2D, le déplacement et son gradient peuvent être liés à des variables nodales via deux matrices d'interpolation classiques  $[N]$  et  $[G]$ . Pour la discrétisation, nous utilisons l'élément 2D-Q8 avec 8 nœuds et 2 degrés de liberté par nœud. Le déplacement

généralisé s'exprime en fonction du déplacement nodal généralisé par une matrice diagonale par bloc:

$$[N^{gen}] = \begin{bmatrix} [N] & [0] & [0] \\ [0] & [N] & [0] \\ [0] & [0] & [N] \end{bmatrix} \quad (10)$$

La relation entre le vecteur déplacement généralisé et le vecteur gradient du déplacement généralisé est

$$\{\Theta\} = \begin{Bmatrix} \{\theta_0\} \\ \{\theta_1^R\} \\ \{\theta_1^I\} \end{Bmatrix} = [G^{gen}] \{V^{gen}\}^e \quad (11)$$

où  $[G^{gen}]$  est la matrice définissant le gradient généralisé:

$$[G^{gen}] = \begin{bmatrix} [G] & [0] & [0] \\ [0] & [G] & -[Q][N] \\ [0] & [Q][N] & [G] \end{bmatrix} \quad (12)$$

La discrétisation du tenseur de déformation généralisé s'écrit:

$$\{\Gamma\} = ([H^{gen}] + 1/2 [A^{gen}(\Theta)]) [G^{gen}] \{V^{gen}\}^e \quad (13)$$

La résolution des équations (5) et (7) est réalisée en utilisant la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [3]. Toutes les variables sont développées en série de Taylor. Le domaine de validité est déduit du calcul de la série vectorielle tronquée. Les longueurs de pas sont calculées a posteriori par l'estimation proposée dans [3]. En utilisant l'évaluation de la série, nous obtenons un nouveau point de départ et définissons, de cette façon, la procédure de continuation de la MAN.

## 4. Résultats et discussions

L'objectif consiste à comparer les résultats obtenus par le modèle sandwich 2D réduit avec ceux calculés par le modèle 1D [4] dans le cas d'une poutre sandwich soumise à une charge de compression (Figure 1) [5]. Deux exemples, dont les caractéristiques sont introduites dans le tableau 1 seront testés afin d'évaluer la capacité du modèle à capturer les plissements et de prendre en compte le couplage entre les instabilités locales et globales.

On note  $h_f$ ,  $h_c$  et  $h_t$  respectivement, l'épaisseur des faces, l'épaisseur de l'âme et l'épaisseur totale de la poutre sandwich. La longueur de la poutre sandwich est notée  $L$ ; avec  $E_c$ ,  $G_c$ ,  $E_s$  sont respectivement le module d'Young de l'âme, le module de cisaillement transverse du cœur et le module d'Young de la peau.

	$E_f$ (Pa)	$L$ (m)	$G_c$ (Pa)	$E_c/E_f$	$h_c$ (m)	$h_t/h_c$
1	$6.9e^{10}$	0.5	$2.65e^{10}$	$1.0e^{-4}$	$8.3e^{-3}$	0.1
2	$7e^{10}$	0.47	$3.57e^7$	$1.4e^{-3}$	$5.0e^{-2}$	0.028

**Table 1:** Paramètres géométriques et matérielles des poutres sandwich

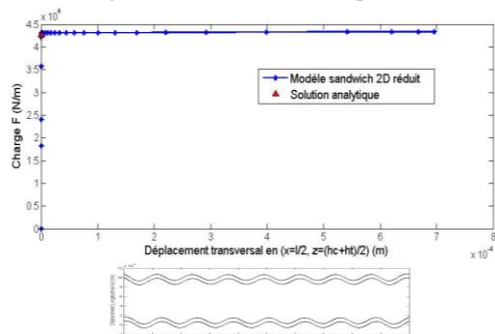
### 4.1 Flambage antisymétrique

Dans cette section, nous allons montrer l'efficacité du modèle sandwich 2D réduit à capter les modes antisymétriques, et ceci en utilisant les caractéristiques de l'exemple 1. Nous choisissons le nombre d'onde de

l'instabilité  $q_0 = 15$ . Une petite perturbation transversale  $F=10^{-5}$  est appliquée au centre de la structure. Le modèle sandwich 2D réduit est discrétisé en 6 éléments 2D-Q8 avec 2 éléments sur la longueur et 3 éléments sur l'épaisseur ce qui conduit à 58 degrés de liberté. La poutre est simplement appuyée sur les deux bords [1], les conditions aux limites utilisées sont  $w_0=0$ ,  $w_1=0$  sur les deux extrémités.



**Figure 2:** Maillage macroscopique utilisé 2 éléments sur la longueur et 3 éléments sur l'épaisseur



**Figure 3:** Charge  $F$  en fonction du déplacement transversal, mode correspondant,  $q_0 = 15$ .

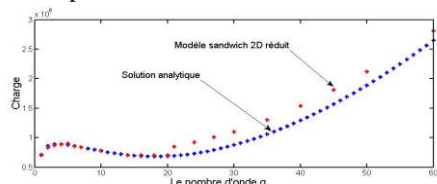
La Figure 3-a représente l'allure de la charge  $F$  en fonction du déplacement transversal au nœud  $(L/2, (h_c + h_t)/2)$ . D'après cette figure, nous constatons que la charge de bifurcation obtenue par le modèle sandwich 2D réduit est proche de celle trouvée analytiquement. La figure 3-b présente le mode qui correspond à cette charge de bifurcation pour  $q_0 = 15$ .

#### 4.2 Flambage asymétrique

Dans cette seconde application qui correspond à l'exemple 2, nous allons comparer la charge critique globale et locale obtenue à partir de la solution analytique et numérique. La solution analytique de la charge critique asymétrique, utilisée pour la comparaison, est celle établie dans [1] dont l'expression est la suivante:

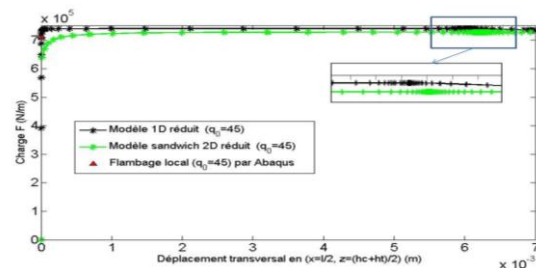
$$\lambda_A = \left( \frac{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 E_f h_f b}{6} \right) h_f^2 + \frac{72G_c E_c (h_c + h_f)^2}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_f G_c h_f h_c^3 + 12 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 E_f E_c h_c h_f + 24E_c G_c} \quad (14)$$

Nous allons varier le nombre d'onde  $q$  afin de montrer à quel point le modèle sandwich 2D réduit est capable de prédire le comportement local.

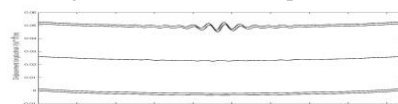


**Figure 4:** Charge critique en fonction du nombre d'ondes  $q$   
Sur la figure 4, on trace les charges critiques numériques établies par le modèle sandwich 2D réduit et par la solution analytique (14). D'après cette figure, on

constate qu'il y a une bonne corrélation entre les valeurs des deux charges critiques.



**Figure 5:** Charge  $F$  en fonction du déplacement transversal



**Figure 6:** Déformée du modèle sandwich 2D réduit

La figure 5 présente la courbe de bifurcation du 45<sup>ème</sup> mode. On constate que les 2 points de bifurcation sont détectés sous le même chargement ce qui signifie que le flambage global et le flambage local sont très proches et qu'une petite perturbation peut différencier un mode à un autre. Le modèle sandwich 2D réduit offre de meilleurs résultats que le modèle 1D réduit [4]. On constate à travers la figure 6 que le modèle sandwich 2D réduit est capable de tenir compte du couplage entre les instabilités locales et globales.

#### Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé un modèle sandwich 2D réduit pour l'étude des instabilités dans les structures sandwich 2D. Le modèle proposé a permis de détecter les instabilités locales et globales et aussi l'interaction local-global. Comme perspective, nous allons appliquer cette technique pour étudier les problèmes d'instabilités cellulaires en 3D en utilisant l'élément DKT18.

#### Références

- [1] Léotoing, L., Drapier, S., Vautrin, A., 2002. Nonlinear interaction of geometrical and material properties in sandwich beam instabilities. *Int. J. Solids Struct.* 39, 3717–3739.
- [2] Damil, N., Potier-Ferry, M., 2010. Influence of local wrinkling on membrane behaviour: a new approach by the technique of slowly variable Fourier coefficients. *J. Mech. Phys. Solids* 58, 1139–1153.
- [3] Cochelin, B., Damil, N. and Potier-Ferry, M., 1994. Asymptotic-numerical methods and Padé approximants for nonlinear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:1187–1213.
- [4] Liu, Y., Yu, K., Hu, H., Belouettar, S., Potier-Ferry M., Damil N., 2012. A new Fourier-related double scale analysis for instability phenomena in sandwich structures. *Int. J. Solids Struct.* 49, 3077–3088
- [5] Mhada, K., Braikat, B., Damil, N., 2013. A 2D Fourier double scale analysis of global-local instability interaction in sandwich structures, 21<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, France,