

Modélisation numérique du contact entre deux corps déformables élastiques basée sur une méthode sans maillage

Y. Belaasilia¹, B. Braikat¹, M. Jamal¹

¹Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux (LIMAT), Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca, B.P 7955, Sidi Othman Casablanca, Maroc. belaasilia@gmail.com, b.braikat@gmail.com, jammoham@gmail.com

Résumé

L'objectif de ce présent travail est de développer un modèle numérique basé sur le couplage des techniques de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) et une méthode sans maillage pour la simulation numérique du contact entre deux corps déformables élastiques appliquée sur une formulation forte. En plus du couplage entre la technique de la MAN et une méthode sans maillage, on propose quelques régularisations des relations du contact. La validation de ce modèle numérique proposé est illustrée sur un exemple typique bidimensionnel de corps déformables et élastiques en contact.

Mots clefs: Méthode sans maillage, Contact, Régularisation, Techniques de la MAN, Forme forte.

1. Introduction

Parmi les non linéarités rencontrées souvent dans les modélisations de certains problèmes de mécanique des solides et des structures, on cite ; les non-linéarités de type comportement qui portent sur la loi de comportement du matériau considéré (plasticité, endommagement,...), les non-linéarités de type géométrique qui tiennent compte des grandes transformations et des grandes déformations et les non-linéarités de type contact [1] dont le décollement ou le glissement peut apparaître dans un contact parfait entre deux solides. La non linéarité de contact se divise en deux catégories ; la non-linéarité de contact unilatéral et celle de frottement [2]. Ces deux catégories sont difficiles à traiter à cause de l'apparition de changements brusques de comportement au passage contact-décollement et au passage adhérence-glissement. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour la modélisation des problèmes de contact à savoir les méthodes classiques de discrétisation et d'autres dites sans maillage qui ont été apparues dans les dernières décennies pour surmonter les difficultés rencontrées dans les méthodes classiques lors du maillage.

Le but de ce travail est de mettre au point une stratégie de résolution numérique d'ordre élevé basée sur la méthode sans maillage dite MLS [3,4] pour simuler le problème de contact sans frottement entre deux corps déformables élastiques en se basant sur une formulation

forte. Cette approche est obtenue en couplant la technique de régularisation [5], la méthode sans maillage, les développements en séries de Taylor et la procédure de continuation [6]. La validité de notre modèle numérique est testée sur un exemple de problème de contact dans le cas bidimensionnel.

2. Formulation forte du problème

On considère deux corps élastiques déformables occupant respectivement les domaines Ω^1 et Ω^2 . Ils sont soumis à des déplacements imposés sur $\partial\Omega^1_d$ et $\partial\Omega^2_d$, à des efforts extérieurs exercés sur $\partial\Omega^1_N$ et $\partial\Omega^2_N$. Les deux corps sont initialement écartés d'un jeu initial donné par δ qui tend vers zéro tant qu'il y a le contact entre les points M (Maître) et S (Esclave) (Voir figure 1)

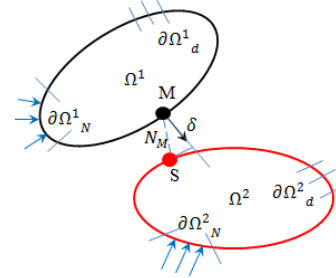


Fig.1 : Modélisation du contact entre deux corps

Les équations classiques de l'équilibre local des corps Ω^j ($j = 1, 2$) complétées par les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} T^j = 0 & \text{sur } \Omega^j \\ T^j \cdot N_j = \lambda F & \text{sur } \partial\Omega^j_N \\ U^j = \lambda U_d & \text{sur } \partial\Omega^j_d \end{cases} \quad (\text{Eq.1})$$

où T est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, N est le vecteur normal à la frontière $\partial\Omega^j_N$, λ est le paramètre de contrôle, U_d est le vecteur déplacement donné sur la frontière $\partial\Omega^j_d$ et F est le vecteur contrainte appliqué sur la frontière $\partial\Omega^j_N$.

3. Condition du contact

Le contact unilatéral est la relation qui lie, sur la zone de contact, les efforts normaux (pressions de contact) et le mouvement relatif des deux corps dans la direction normale (décollement). On représente le vecteur de réaction R en tenant compte du principe de l'action-réaction des deux corps par :

$$T^2 N_S = -T^1 N_M = R \quad (\text{Eq.2})$$

Le contact unilatéral sans frottement est réalisé par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} R_n = 0 & \text{si } \delta \neq 0 \\ R_n > 0 & \text{si } \delta = 0 \\ R_t = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq.3})$$

Avec $\delta = \delta^0 + N_M(U_S - U_M)$ où δ^0 , N_M , U_S et U_M sont respectivement le jeu initial, la normale sortante du corps maître et les déplacements des points S et M. (Voir figure 2)

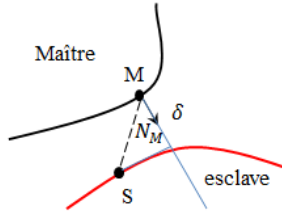


Fig.2 : Contact unilatéral

4. Modèle proposé

Le principe du modèle numérique proposé repose sur le couplage d'une technique de régularisation, d'une méthode sans maillage, d'une technique de développements en séries de Taylor. Ces dernières sont remplacées par une fonction régularisée donnée par :

4.1. Technique de régularisation

La technique de régularisation des fonctions singulières comme les conditions du contact unilatéral (Eq.3) permet de chercher la solution sous forme d'un développement en séries de Taylor. Ces dernières sont remplacées par une fonction régularisée donnée par :

$$R_n = \frac{\eta_c}{\delta} (\delta_0 - \delta) \quad (\text{Eq.4})$$

avec η_c est le paramètre de régularisation supposé petit. Sur la figure Fig.3, on représente la composante normale de la réaction en fonction du jeu δ avec et sans régularisation.

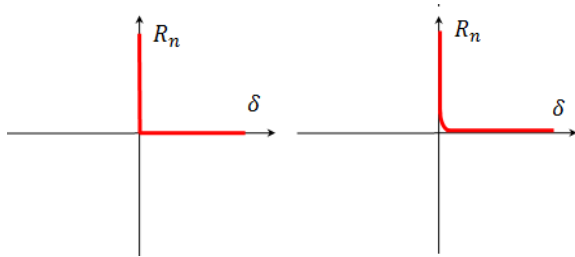


Fig.3 : Loi de contact unilatéral sans régularisation (a : à gauche) et avec régularisation (b : à droite)

4.2. Développement en séries de Taylor

Cette technique consiste à chercher les inconnues du problème $\{X\} = \{U, \lambda\}^T$ sous forme de séries de Taylor par rapport à un paramètre de chemin "a" défini par une relation de pilotage (Eq.6)

$$\{X\} = \sum_{k=0}^{k=p} a^k \{X_k\} \quad (\text{Eq.5})$$

$$a = (\{X\}^T - \{X_0\}^T) \{X_1\} \quad (\text{Eq.6})$$

Les développements insérés dans (Eq.1) après identification des équations du système selon les puissances du paramètre de chemin "a", on obtient une

séquence de problèmes linéaires à chaque ordre $1 \leq k \leq p$

$$\begin{cases} [L]\{T_k\} = \{0\} & \text{sur } \Omega^j \\ [N]\{T_k\} = \lambda_k \{F\} & \text{sur } \partial\Omega_N^j \\ [N]\{T_k\} = \{R_k\} & \text{sur } \partial\Omega_c \\ \{U_k\} = \lambda_k \{U_d\} & \text{sur } \partial\Omega_d^j \end{cases} \quad (\text{Eq.7})$$

4.3. Approche sans maillage (MLS)

Après une approximation par la méthode sans maillage MLS [3,4] des déplacements, la substitution des lois de comportement et la technique d'assemblage, donnent les problèmes linéaires suivants:

$$\text{Pour } k = 1 \quad [K_T]\{U_1\} = \lambda_1 \{F\} \quad (\text{Eq.8})$$

$$\text{Pour } k \geq 2 \quad [K_T]\{U_k\} = \lambda_k \{F\} + \{F_k^{nl}\} \quad (\text{Eq.9})$$

où $[K_T]$ est la matrice tangente, $\{F_k^{nl}\}$ est le terme qui dépend des solutions aux ordres précédents. Cette technique consiste d'abord à estimer le rayon de convergence de la série a_{max}

$$a_{max} = \left(\varepsilon \frac{\|U_1\|}{\|U_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (\text{Eq.10})$$

4.4. Procédure de continuation

La solution $\{X\}_{(a_{max})}$ est considérée comme une nouvelle solution de départ de la branche suivante. La solution entière est ainsi obtenue complètement branche par branche, par itération du processus plusieurs fois en actualisant la solution de départ [6]

5. Application numérique

On considère deux blocs en contact l'un sur l'autre de caractéristiques mécaniques et géométriques différentes.

Le premier bloc (maître) est élastique de Module Young $E = 210 \cdot 10^3$, de Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et de forme rectangulaire de largeur $H_1 = 50 \text{ mm}$ et de longueur $L_1 = 100 \text{ mm}$ et soumis d'un déplacement imposé sur le bord supérieur.

Le deuxième bloc (esclave) est élastique de Module Young $E = 70 \cdot 10^3$, de Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et de forme rectangulaire de largeur $H_2 = 100 \text{ mm}$ et de longueur $L_2 = 200 \text{ mm}$ et encastré sur le bord inférieur. Par raison de symétrie on ne considère que la moitié de structure comme illustrée dans la figure 4.

Les données numériques utilisées sont reportées dans le tableau suivant :

Maillage (maître)	(17 × 17)
Maillage (esclave)	(41 × 41)
Déplacement imposé	$U_d = -5 \text{ mm}$
Rayon du domaine d'influence	$h = 2.5 \times (\max(dx, dy))$
Ordre de troncature	$P = 15$
Paramètre de tolérance	$\varepsilon = 10^{-8}$
Paramètre de régularisation	$\eta_c = 0.1$

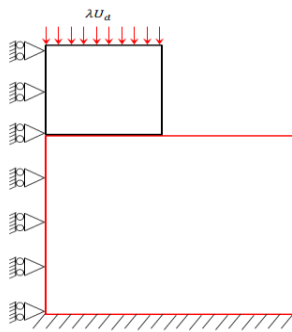


Fig.4 : Problème du contact avec conditions aux limites

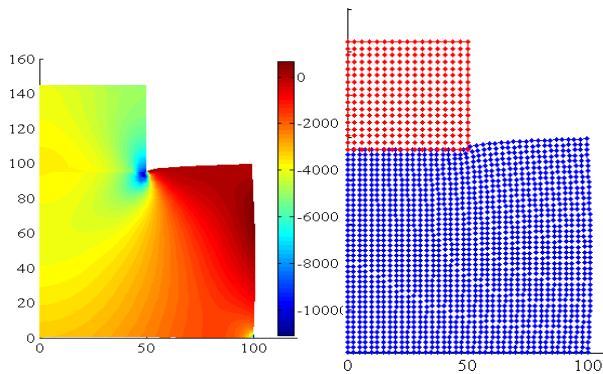


Fig.5 : Distribution de la contrainte S_{22} (à gauche) et état déformé de deux corps après le contact (Maître en rouge et l'esclave en bleu)

Sur la figure qui illustre la distribution des contraintes, on remarque qu'il y a une concentration de contraintes sur l'extrémité de zone de contact sans qu'il y ait de pénétration du maître dans l'esclave.

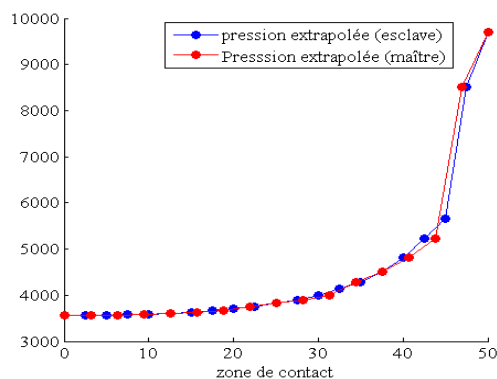


Fig.6 : Pression de contact exercée par les deux corps l'un sur l'autre.

Sur cette figure, on trace la courbe de pression causée par l'action de contact entre les deux corps. L'écart observé entre les deux figures est causé par le décalage entre les points maîtres et ceux esclaves sur la zone de contact.

6. Conclusion

Dans ce travail, on a développé un modèle numérique basé sur une méthode sans maillage permettant la modélisation et la simulation des problèmes de contact de deux corps élastiques. Le modèle proposé est développé en combinant la méthode sans maillage MLS et une technique d'ordre élevé basée sur le couplage des

développements en séries de Taylor et une méthode de continuation. Ce modèle est appliqué directement sur une formulation forte. L'objectif était d'éviter l'inconvénient lié à l'intégration numérique et de réduire le coût de calcul en termes du nombre d'inversions de la matrice tangente rencontré au cours de l'utilisation des méthodes incrémentales itératives telle que la méthode de Newton-Raphson.

Références

- [1] N. Kikuchi, J. T. Oden, *Contact problems in elasticity*, SIAM Philadelphia, 1988
- [2] K. François, *Méthodes duales pour les problèmes de contact avec frottement*, Thèse, Université de Provence, 2008.
- [3] A. Timesli, B. Braikat, H. Lahmam, H. Zahrouni, *A new algorithm based on Moving Least Square method to simulate material mixing in friction stir welding*, Engineering Analysis with Boundary Elements, V50, (2015), 372-380.
- [4] A. Timesli, B. Braikat, H. Zahrouni, A. Moufki, H. Lahmam, *An implicit algorithm based on continuous Moving Least Square to simulate material mixing in friction stir welding process*, Modelling and Simulation in Engineering, vol2013, (2013), 1-14 ,
- [5] M. Assidi, H. Zahrouni, N. Damil, M. Potier-Ferry, *Regularization and perturbation technique to solve plasticity problems*, International Journal Material Forming, V2, (2009), 1-14
- [6] B. Cochelin, *A path-following technique via an asymptotic numerical method*, Computer & Structures, V53, (1994), 81-92