

# STABILITE LINEAIRE D'UN ECOULEMENT DE TAYLOR COUETTE POUR UN FLUIDE DE BINGHAM

ALIBENYAHIA BRAHIM<sup>1</sup>, CHERIF NOUAR<sup>2</sup>, AIT MESSAOUDENE<sup>1</sup>

LApEH, University of Blida Box 270 Soumaa Blida <sup>1</sup>  
e-mail address: alibenyahia\_brahim@yahoo.com  
LEMTA, CNRS UMR 7563, UHP & INPL, 2, Avenue  
de la foret de Haye, BP 160, 54504 Vandoeuvre, France <sup>2</sup>

## Résumé

L'écoulement des fluides non newtoniens dans les conduites annulaire sont d'une grande importance industrielle. L'exemple classique est représenté par le forage pétroliers, Lorsque les boues des forages sont remontées dans l'espace annulaire situé autour du tuyau de forage. Ces boues de forage ont habituellement un comportement Binghamien ou pseudo-plastique. Cette étude porte sur l'analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Couette circulaire entre deux cylindres coaxiaux en rotation, pour un fluide de Bingham. L'écoulement de base et les courbes de stabilité marginale sont déterminés et analysés. L'effet des paramètres rhéologiques sur la stabilité est mis en évidence.

**Mots clés :** fluide de Bingham, stabilité linéaire, écoulement Taylor-Couette

## 1-Introduction

Les fluides à seuil ont des comportements très différents des fluides Newtoniens. Mais ils sont très présents dans l'industrie comme l'industrie pétrolière. Par exemple, lors du forage d'un puit de pétrole, il faut injecter du béton dans une conduite cylindrique pour que celui-ci remonte entre la conduite et la paroi que l'on veut solidifier. Il est alors important de connaître l'écoulement que l'on crée pour assurer une bonne répartition du béton et ainsi assurer la solidité de la structure. En effet, une mauvaise répartition peut créer des cavités. Pour mieux cerner ce comportement, la stabilité de l'écoulement de Couette circulaire d'un fluide rhéofluidifiant a déjà été étudiée par le passé pour le cas où seul le cylindre intérieur tourne. Une synthèse de ces travaux est donnée dans [1]. Une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux pour un fluide de Bingham est exécutée.

## 2-Formulation Mathématique

L'écoulement d'un fluide incompressible entre deux cylindres concentriques infiniment longs est étudié. Le cylindre intérieur, de rayon  $R_1$ , tourne à la

vitesse angulaire  $\Omega_1$  et le cylindre extérieur, de rayon  $R_2$  est immobile. Les équations adimensionnelles décrivant le mouvement du fluide s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{Re}(\mathbf{V} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{V} &= -\vec{\nabla}P + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} \end{aligned} \quad 1$$

Où  $\mathbf{V}$  est la vitesse,  $P$  la pression et  $\tau$  le déviateur du tenseur des contraintes. La vitesse est de la forme  $\vec{V} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta + w\vec{e}_z$  où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les vecteurs unités dans les directions radiale  $r$ , azimutale  $\theta$  et axiale  $z$  respectivement. Ces équations ont été adimensionnées en utilisant la largeur de l'entrefer  $d = R_2 - R_1$  comme longueur de référence, la vitesse du cylindre intérieur  $\Omega_1 R_1$  comme échelle de vitesse,  $\mu_{\text{ref}} R_1 \Omega_1 / d$  pour les échelles de contrainte et de pression et le temps de diffusion visqueuse  $\rho d / \mu_{\text{ref}}$  comme échelle de temps. La viscosité de référence  $\mu_{\text{ref}}$  sera précisée plus loin. Dans cette étude, seul le cas de fluide de Bingham sera considéré, c'est-à-dire des fluides dont la viscosité effective  $\mu$  décroît lorsque le taux de cisaillement augmente. Après adimensionnement, les lois de comportement s'écrivent :

$$\tau_{r\theta} = \mu \dot{\gamma}_{r\theta} = (1 + B/\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{r\theta} \quad \text{si } \tau > B \quad \text{et } \dot{\gamma} = 0 \quad \text{si } \tau < B \quad 2$$

Les paramètres sans dimensions  $B$  et  $\text{Re}$  sont respectivement le nombre de Bingham (le rapport entre la contrainte seuil et une contrainte visqueuse nominale) et le nombre de Reynolds (le rapport entre les effets d'inertie et les effets visqueux). Ils sont définis par :

$$B = \frac{\tau_y d}{\mu_p R_1 \Omega_1} \quad \text{Re} = \frac{\rho R_1 \Omega_1 d}{\mu_p} \quad 3$$

## 3-Ecoulement de base

L'écoulement de base est supposé stationnaire avec un champ de vitesse purement azimutale  $\mathbf{V} = (0, V^b(r), 0)$ . L'équation de mouvement, écrite en coordonnées cylindrique, donne :

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) \quad \text{Avec : } \tau_{r\theta}(R_1) = \tau_i \quad 4$$

Les profils des vitesses, pour un fluide de Bingham, sont donnés dans la figure 1 On peut remarquer que lorsque le caractère rheofluidifiant augmente, la valeur absolue du gradient de vitesse croit sur la paroi intérieure et décroît sur la paroi extérieure,

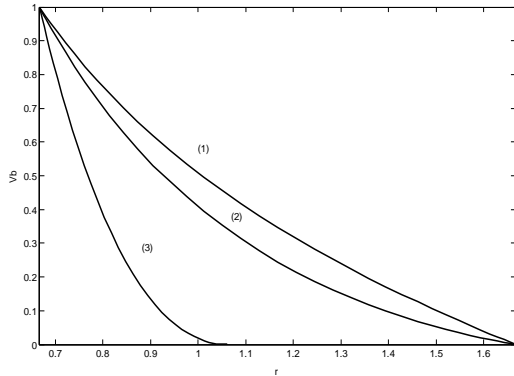


Figure 1 : Profils de vitesse azimutale pour un fluide de Bingham ( $Re_2=0$ ) pour un rapport de rayon  $\eta=0.4$  : (1) Cas Newtonien  $B=0$  ; (2) Cas où tout l'espace annulaire est cisailé  $B=0.5$  ; (3) Cas où une zone étroite est cisailée  $B=5$ .

Les profils des viscosités, pour un fluide de Bingham, sont donnés dans la figure 2. Si la viscosité de cisaillement de la paroi interne est utilisée comme référence, on peut observer que la viscosité globale augmente avec l'effet de la rhéofluidification.

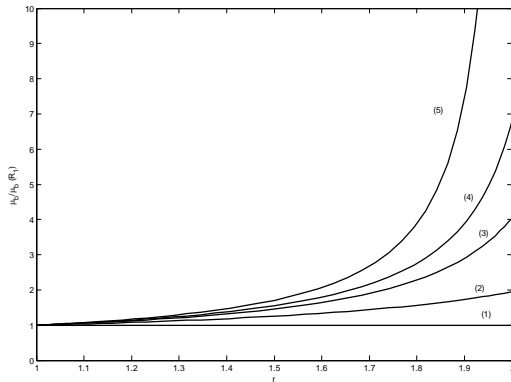


Figure 2 : Profils de viscosités pour un fluide de Bingham (Zone 1)  $Re_2=0$  pour un rapport de rayon  $\eta=0.5$ : (1)  $B=0$  fluide Newtonien ; (2)  $B=0.5$ ; (3)  $B=0.88$ ; (4)  $B=1$  et (5)  $B=1.23$ .

### 5-Analyse linéaire de la stabilité

Nous savons qu'un fluide newtonien est linéairement stable et nous désirons savoir ce qu'il en est d'un fluide de Bingham. Dans cette partie, nous allons donc étudier la stabilité de l'écoulement de base vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale. Dans le cadre d'une analyse temporelle, pour un Reynolds donné, si la perturbation est amplifiée au cours du temps, l'écoulement est dit instable. Au contraire, si la perturbation est atténuée, l'écoulement est dit stable.

L'écoulement perturbé est décrit par  $(U+\epsilon u', P+\epsilon p')$ , avec  $U=U(r)$   $\epsilon \ll 1$  est un petit paramètre sans dimension.

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement aux perturbations s'écrivent:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (U + \epsilon u') &= 0 \\ \frac{\partial (U + \epsilon u')}{\partial t} + (U + \epsilon u') \cdot \nabla (U + \epsilon u') &= -\nabla (P + \epsilon p') + \nabla \cdot \tau (U + \epsilon u') \end{aligned} \quad 5$$

Et les équations pour l'écoulement de base sont donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot U &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \text{Re}(U \cdot \bar{\nabla})U &= -\bar{\nabla}P + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \end{aligned} \quad 6$$

En soustrayant les équations 5 et 6, et en ne retenant que les termes d'ordre 1 en  $\epsilon$ , on obtient [2]:

$$\nabla \cdot u' = \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad 7$$

$$\begin{aligned} \epsilon (u' \cdot \bar{\nabla} + \text{Re}(u' \cdot \nabla)U + (U \cdot \nabla)u') + \epsilon^2 \text{Re}(u' \cdot \nabla)u' &= \\ -\epsilon \nabla p + \nabla \cdot (\tau(U + \epsilon u') - \tau(U)) \end{aligned}$$

Pour étudier la stabilité, on suppose que la solution est sous forme d'onde. On cherche des solutions en modes normaux sous la forme

$$(u', v', w', p') = (u(r), v(r), w(r), p(r)) e^{\lambda t + i(m\theta + kz)} \quad 8$$

$k$  : longueur d'onde longitudinale  $m$  : est la longueur d'onde azimutale  $\lambda$  : est la vitesse de phase

En éliminant la pression et une des trois composantes de vitesse, pour ne garder que deux composantes de la vitesse  $w$  et  $p$  (resp  $v$  et  $p$ ) on aboutit à un problème aux valeurs propres qui peut s'écrire formellement. Ces manipulations conduisent aux équations suivantes formulées seulement en  $u$  et  $v$ . Nous désirons mettre ces équations sous forme matricielle afin d'avoir une équation du type :

$$Aq = \lambda Bq \quad 9$$

$A$  et  $B$  sont des opérateurs matriciels [2].  $\lambda_r = \text{Re}(\lambda)$  et  $\lambda_i = \text{Im}(\lambda)$ . On aura la stabilité si  $\lambda_i < 0$ . Si  $\lambda_i > 0$ , le système est linéairement instable. Si  $\lambda_i = 0$ , on dit que le système est neutre.

### 6- Résolution numérique

Les solutions du problème aux valeurs propres avec ses conditions aux limites sont calculées sous Matlab après discrétisation du système par une méthode de collocation de Chebychev. Le code est validé en vérifiant les résultats obtenus pour l'écoulement de Taylor Couette pour un fluide newtonien.

#### 6-1 Perturbation bidimensionnelle $m=0$

Comme premier test de validation, les valeurs du nombre de Reynolds critique pour un fluide newtonien et pour différents rapports de rayons  $\eta$  obtenus par nos calculs sont comparées à celles obtenues par Chandrasekhar [2]. Comme le montre la figure 3, une

excellente concordance entre les deux résultats est observée.

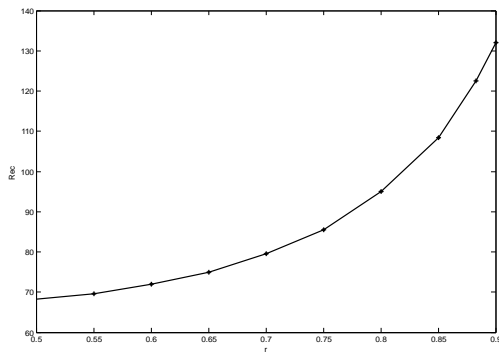


Figure 3 : Nombre de Reynolds critique en fonction de Rapport de Rayon pour un fluide Newtonien. (-)Nos résultats ; (\*) Chandrasekhar [2].

En effectuant des itérations sur le nombre d'onde  $k$  et le nombre de Reynolds  $Re$  on obtient le nombre de Reynolds critique pour lequel la valeur propre la moins stable a sa partie réelle nulle. La variation du nombre de Reynolds critique avec le nombre de Bingham est montrée dans la figure 4. A nouveau, on observe que  $Re_c$  croît lorsqu'on augmente la stratification de viscosité induite par le nombre de Bingham  $\mu=1+B/\gamma$ . Nos résultats, obtenus pour un rapport de Rayon  $\eta=0.5$  et  $\eta=0.883$  respectivement, confirment ceux donnés par Landry *et al.*

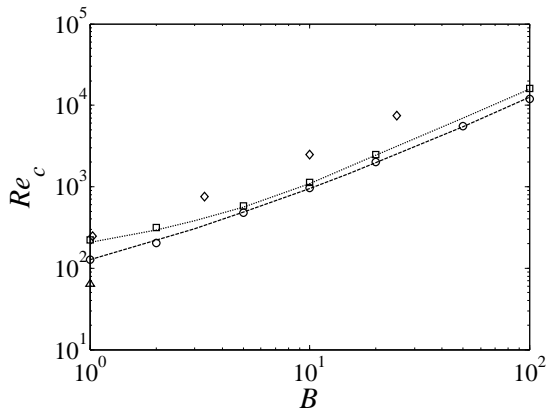


Figure 4 – Nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham pour deux rapports de rayons :  $\eta = 0.5$  (—) et  $\eta = 0.883$  (···). (o) Landry *et al.* [5] pour  $\eta = 0.5$ , (□) Landry *et al.* [5] pour  $\eta = 0.883$ , (◇) Caton [1] pour  $\eta = 0.5$ , (△) Lockett *et al.* [6] pour  $\eta = 0.5$ .

## 6-2 Perturbation non axisymétrique $m \neq 0$

Dans le cas d'une perturbation tridimensionnelle, la formulation  $(u, v)$  est utilisée pour calculer les conditions critiques. La figure 5 montre les courbes de stabilité marginale pour les différents nombres d'onde azimutaux  $m$ . On observe clairement que  $Re_c$  augmente lorsque le nombre d'onde azimutal augmente. Le minimum est toujours atteint dans le cas axisymétrique, même pour des fluides très rhéofluidifiants ( $B = 50$ ).

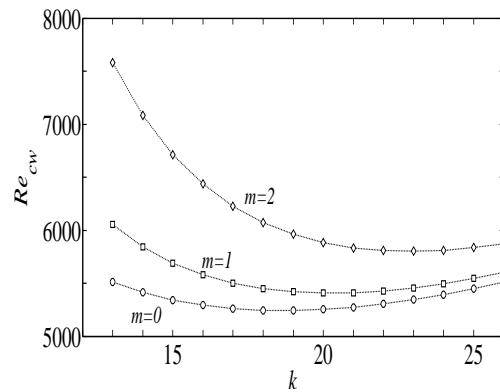


Figure 5 : Courbe de stabilité marginale pour  $\eta = 0.5$  et pour différents nombres d'ondes azimutaux  $m$  pour un fluide de Bingham avec  $B=50$ .

## 9-Conclusion

Une analyse de stabilité linéaire de la stabilité d'un écoulement de Couette entre deux cylindres Coaxiaux pour un fluide de Bingham a été effectuée. Le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur en rotation. Les résultats obtenus pour le nombre de Reynolds critique sont comparés avec plusieurs résultats antérieurs cités dans la littérature. Dans tous les cas étudiés, on observe que lorsque la viscosité diminue quand on s'approche de la paroi interne. L'étude faite constitue une étape fondamentale vers une compréhension de la transition laminaire turbulente d'un fluide à seuil.

## References

- [1] B. Alibenyahia, C. Lemaitre, C. Nouar, et N. Ait-Messaoudene, *Revisiting the stability of circular Couette flow of shear-thinning fluids*, J of Non-Newtonian Fluid Mech, vol. 183 184 (2012), p 37-51.
- [2] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic Clarendon and Hydromagnetic stability*. Oxford, Press, 1961.
- [3] F. Caton, *Linear stability of circular Couette flow of in elastic viscoplastic fluids*. Non Newton. Fluid Mech., 134 (2006), 148–15.
- [4] C. Nouar & I.A. Frigaard, *Nonlinear stability of Poiseuille flow of a Bingham fluid; theoretical results and comparison with phenomenological criteria*, J. Non-Newt. Fluid Mech. 100 (2001), p 127 149.
- [5] M.P. Landry and al. *Stability and Instability of Taylor - Couette flows of a Bingham fluid*. J. Fluid. Mech. 560 (2006) 321-353
- [6] T.J. Lockett, S.M. Richardson, W.J. Worraker; *The stability of inelastic non-newtonian fluids in Couette flow between concentric cylinders: Finite element study*, J .Non-Newtonian Fluid Mech. 43(1992), p165-177.