

# RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DU MAXWELL DANS LE CAS QUASI-STATIONNAIRE

S. BENNOUD <sup>1</sup>, M. ZERGOUG <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire des aéronefs, Université de Blida 1, Algérie.

bensalimen2006@yahoo.fr.

<sup>2</sup> CRTI (ex CSC), Alger, Algérie.

## Résumé :

L'étude et l'analyse de champ électromagnétique sont de grande importance dans diverses applications technologiques.

Les équations du Maxwell offrent la base mathématique pour l'analyse rigoureuse des problèmes électromagnétiques.

La modélisation de phénomènes électromagnétiques constitue un intérêt majeur dans de nombreux domaines d'application.

En effet, la complexité des géométries des problèmes étudiés induit que la solution analytique n'existe pas, et évidemment, l'intérêt est orienté sur la recherche des solutions numériques approximatives.

La méthode des éléments finis a été appliquée avec succès pour résoudre les problèmes électromagnétiques, elle est pratiquement la plus adaptée et la plus utilisée pour ce genre de problèmes puisqu'elle s'adapte aux formes complexes des sections étudiées.

L'objectif principal de cette étude est la résolution des équations du Maxwell en s'appuyant sur la modélisation des problèmes électromagnétiques par la méthode des éléments finis dans le but de calculer l'évolution du champ électromagnétique dans différents domaines.

**Mots clés :** champ électromagnétique, équations du Maxwell, méthode des éléments finis

## Introduction :

Les phénomènes électriques et magnétiques sont connus depuis l'antiquité. Le champ électromagnétique est une pierre angulaire de la physique moderne et l'interaction électromagnétique s'applique à toute particule possédant une charge électrique non-nulle.

L'interaction électromagnétique est l'interaction fondamentale dont les effets sont les plus fréquents dans la vie courante, en effet, elle est la seule interaction utilisée naturellement par le corps humain pour communiquer, analyser l'environnement, consommer de l'énergie, etc. [1].

Les équations du Maxwell offrent la base mathématique pour l'analyse rigoureuse des problèmes électromagnétiques [2].

L'application de la méthode des éléments finis FEM dans l'électromagnétisme convient à l'analyse des problèmes électromagnétiques, elle est pratiquement la plus adaptée et la plus utilisée pour ce genre de problèmes puisqu'elle s'adapte aux formes complexes des sections étudiées. [3- 5].

L'étude, l'analyse et les calculs de champ électromagnétique font l'objet de plusieurs travaux récemment publiés [6-10].

L'objectif principal de ce travail est le développement d'un code numérique, qui peut présenter de divers problèmes de l'évolution de champ électromagnétique dans différentes géométries et donne la possibilité d'exécuter des simulations pour des géométries complexes utilisées dans différentes industries.

La résolution de divers cas permet, à travers la solution obtenue après la formulation par la méthode FEM, de calculer le potentiel et le champ magnétique (ou électrique) dans la section choisie, et une fois que ce champ est donné, nous pouvons déduire d'autres paramètres physiques.

La validation de code développé a été réalisée pour des cas bidimensionnels simples. Les résultats obtenus par le code sont adéquats avec la solution analytique. Cela permet d'exploiter ce code, par la suite, pour effectuer des simulations pour des géométries complexes en 3D.

## Modélisation du problème :

Dans le domaine électromagnétique, les phénomènes physiques étudiés permettent d'élaborer un modèle mathématique basé sur la résolution des équations de Maxwell. Ces équations sont les suivantes :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu (\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t) \quad (\text{théorème d'Ampère-Maxwell}). \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t \quad (\text{loi de Faraday}) \quad (2)$$

$$\text{div. } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{loi de conservation de flux magnétique}) \quad (3)$$

$$\text{div. } \mathbf{E} = \rho / \epsilon \quad (\text{théorème de Gauss}) \quad (4)$$

Où  $\mu$ ,  $\epsilon$  représentent respectivement la perméabilité et la permittivité du milieu.  $\rho$  représente la densité volumique de charges électriques.  $\mathbf{E}$  est le champ électrique.  $\mathbf{B}$  est l'induction magnétique.  $\mathbf{j}$  est la densité de courant.  $\mathbf{D}$  est l'induction électrique.

Les relations constitutives sont données sous les formes suivantes :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (7)$$

$H$  est le champ magnétique, et  $\sigma$  et la conductivité du milieu.

Des formulations en potentiels sont introduites afin de développer une solution des problèmes du champ électromagnétique par la méthode MEF [11-12].

### Validation et simulations :

Après la construction d'un système d'équations, et à partir de modèle mathématique considéré, nous obtenons des équations différentielles : soit de type Poisson (dans le cas statique), soit de type Helmholtz (cas harmonique dépendant du temps).

Pour la validation de code dans le cas statique, la géométrie cercle, qui possède une solution analytique, est choisie pour étudier l'évolution des champs magnétique et électrique.

La formule  $E = - \text{grad } V = - \nabla V$  permet de trouver le potentiel électrique  $V$  quand le champ électrique  $E$  est connu et réciproquement.

L'introduction des différents paramètres caractérisant le champ étudié, tels que : la permittivité  $\epsilon$ , la perméabilité  $\mu$ , et la densité de charge électrique  $\rho$ , permet de déduire  $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r$  et  $\mu/\mu_0 = \mu_r$  la permittivité et la perméabilité relatives du milieu, permet d'identifier exactement le domaine d'étude et de calculer le deuxième membre de l'équation de Poisson.

Pour la validation de ce cas, les valeurs suivantes sont prises pour l'application :

Le rayon = 10 Cm,  $\epsilon_r=1$  et  $\mu_r=1$  la permittivité et la perméabilité relatives du milieu, la charge électrique  $\rho=1$ .

Les conditions aux limites appliquées sont de type Dirichlet avec  $V=0$  volt.

#### Caractéristiques de l'application :

- Nombre total des nœuds de maillage NNT 225.
- Nombre total des éléments de maillage NEL 392 (avec un élément de maillage triangulaire à 3 nœuds,).
- Nœuds de la frontière à éliminer par les conditions aux limites NNDLE 56.
- Nœuds à calculer NNDLR 169.
- Nombre des cases à considérer NCASE. (Par raison de la symétrie de la matrice et après l'implication des conditions aux limites).
- Nombre des cases utilisées réellement NCASER. (Après élimination des 0).

On remarque que le code développé peut avoir un gain très important en espace mémoire utilisé, (pour l'exemple cité, le maillage présenté contient NNT=225 nœuds, la matrice à résoudre est une matrice carrée de taille de  $225*225=50625$  cases, les conditions aux limites permettent d'éliminer  $(56*225 \text{ lignes} + 169 \text{ colonnes} * 56) = 22064$  cases ou bien  $(\text{NNDLR} * \text{NNDLR} + 169 * 169)$ , la symétrie donne une possibilité de travailler avec  $(\text{NNDLR} * \text{NNDLR} + 1) / 2 = 14365$  cases, la bande permet l'élimination des 0, ce qui laisse un nombre de cases à considérer  $\text{NCASE} = 3689$  cases, et finalement, l'élimination des 0 inclus dans la bande donne un nombre des cases réellement intervenant dans le calcul  $\text{NCASER} = 2430$  cases.

L'espace de la matrice utilisé pour le stockage est NCASER/ Taille\*100 =  $2430/50625*100=4,8\%$

Le gain en espace est de 95,2 %, c'est un gain très important qui réduit considérablement le temps de calcul.

La valeur maximale (obtenue au point (0,0) pour le champ électrique) donnée par le code est  $1.12E+09V$ , et la valeur analytique vaut  $1.13E+09V$  avec une erreur relative de  $8.8E-03$ .

Les résultats obtenus par le code réalisé, s'approchent vers la solution analytique avec une erreur moyenne de 0.005.

Après la validation de notre code, nous allons effectuer des applications pour les différentes géométries utilisées, afin de présenter graphiquement les distributions des champs obtenus pour chaque géométrie.

La figure 1 présente certaines applications pour différents cas et géométries.

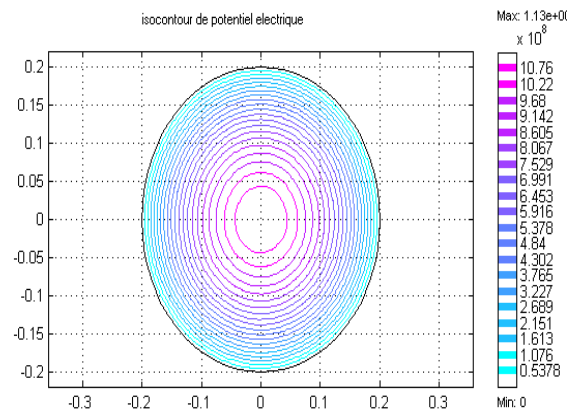


Figure (1 a) : Simulation sur une surface circulaire.

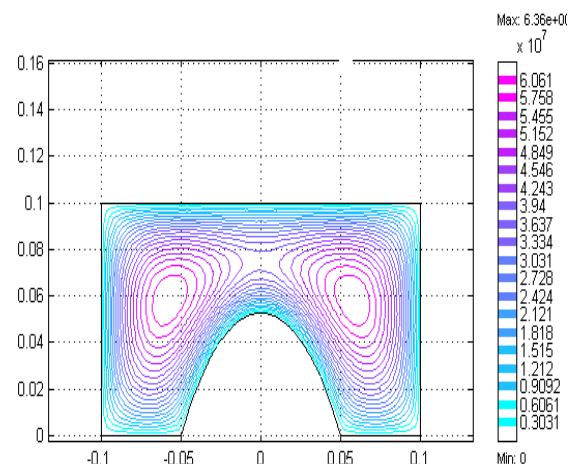


Figure (1 b) : Application sur une surface complexe (iso valeurs de potentiel électrique).

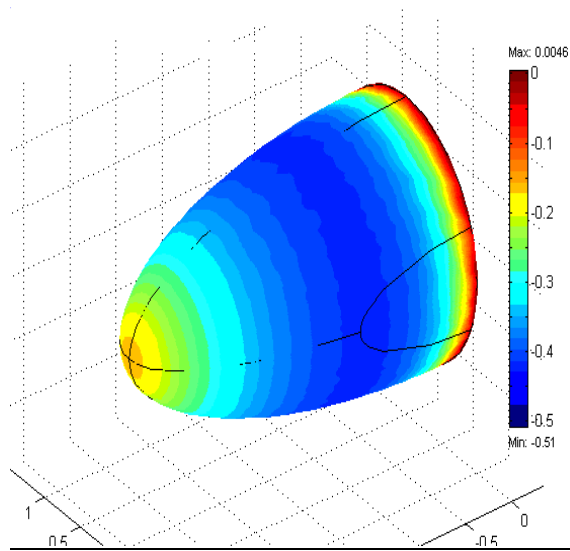


Figure (1-c) : Application à une géométrie coque (iso valeurs de potentiel électrique)

Une meilleure exploitation de code nécessite de prendre en considération les paramètres influant sur le calcul, tel que : l'augmentation de nombres des nœuds ou des éléments, le changement de la fonction d'interpolation, etc.

Une bonne optimisation de nombre des nœuds utilisés, permet d'obtenir une meilleure convergence (trouver la solution, en utilisant le nombre des nœuds nécessaire et optimal). Ainsi, le nombre des nœuds utilisés influe directement sur la taille de la matrice globale. Ce que réclame une maîtrise puissante et solide d'utilisation d'utile informatique, et des techniques de résolution numérique.

### Conclusion :

Des simulations numériques de l'évolution du champ magnétique et/ou champ électrique en différentes géométries ont été présentées, ces simulations sont réalisées grâce à un code développé lors de cette étude.

La validation du code a été faite pour des cas bidimensionnels simples. Les résultats obtenus par le code, convergent vers la solution analytique avec une erreur de 0.005. Cela nous permet d'utiliser le code pour effectuer des simulations pour d'autres géométries 2D et par la suite 3D. Une meilleure exploitation du code nécessite la prise en considération de paramètres influant sur le calcul tels que l'augmentation de nombres des nœuds ou des éléments, et le changement de la fonction d'interpolation.

### Références :

- [1] Firm. A., « **Physique Générale** », Inter Editions, Paris, 1986.
- [2] Jianming. J, « **The finite element method in electromagnetic** », John Wiley & Sons -IEEE Press, New York, 2002.
- [3] D. Tikhonova, J. Zentnerb, A. Tkacheva, « **Algorithm for simulation of electromagnetic processes using combined finite and boundary elements method** », Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 662–664, 2004.
- [4] P Monk, « **Finite Element Methods for Maxwell's Equations** », (Oxford University Press, New York). 2003.
- [5] Liu Xu-dong., Yang Xiao-dong., Zhu Miao-yong., CHEN Yong., YANG Su-bo. « **Finite element analysis of 3d electromagnetic field in bloom continuous casting mold** ». Journal of Iron and Steel Research, 14(3), 06-12, 2007.
- [6] Baokun Yang., Hongbing Zheng., and Guirong Yan. « **Numerical simulation of the electromagnetic-vibration of a gyroscope motor** ». International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 39(1-4), 949-955, 2012.
- [7] Nurulasikin Mohd Suhadis., and Renuganth Varatharajoo. « **A study of coupled magnetic fields for an optimum torque generation** » Int. Jnl. of Multiphysics, 6(1), 73-88, 2012.
- [8] Qi-hong FANG., Hui FENG., You-wen LIU. « **Electroelastic interaction between piezoelectric screw dislocation and circularly layered inclusion with imperfect interfaces** ». Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 34(1), 45-62, 2013.
- [9] Zhanlei Zhang., and Guozhong Liu. « **The design and analysis of electromagnetic tracking system** ». Journal of Electromagnetic Analysis and Applications, 5, 85-89, 2013.
- [10] Bennoud S, Zergoug M et Allali A, « **Numerical simulation for cracks detection using the finite elements method** », Int. Jnl. of Multiphysics IJM, 8(1), 1-10, 2014.
- [11] M. Kogl, S. Hurlebaus and L. Gaul, « **Finite element simulation of non-destructive damage detection with higher harmonics** », NDT&E International, 37, 195-205, 2004.
- [12] S Bennoud and M Zergoug, « **Modeling and development of simulations of eddy current testing for plate parts** », Advanced Science Letters, 15, 22-24, 2012.