

Transfert thermique dans une cavité cylindrique munie de blocs chauffants de faibles hauteurs

A. EL AMRAOUI¹, A. CHEDDADI^{1*}, M.T. OUAZZANI¹

1. Equipe de recherche en systèmes thermiques et écoulement réel, ERSTER, Ecole Mohammedia d'ingénieurs, B.P 756 Agdal, Rabat, Maroc
* auteur correspondant : cheddadi@emi.ac.ma

Résumé

Dans le présent travail on étudie numériquement les effets thermoconvectifs induits par la présence de deux blocs chauffants de hauteur adimensionnelle h et d'une largeur adimensionnelle $l = 0.203$, au sein d'un espace annulaire rempli d'air, $Pr = 0.7$ et compris entre deux cylindres coaxiaux, horizontaux et isothermes de rapport de forme $R = 2$.

L'étude a été menée, pour comprendre l'influence de la hauteur des blocs sur la structure de l'écoulement et sur le taux de transfert de chaleur, pour une gamme des nombres de Rayleigh allant de 10^3 à 10^4 et une position angulaire des blocs $\varphi_m = 0.82\pi$, fixe. Un nombre de Rayleigh critique, caractérisant l'établissement du régime bicellulaire, est déterminé pour des valeurs de h allant de 0.109 à 0.140. L'importance des phénomènes convectifs pour ce régime est discutée en fonction de Ra .

Mots clefs : *Cavité cylindrique, blocs chauffants, rapport d'intensité, nombre de Rayleigh critique, régimes d'écoulement, transfert de chaleur.*

1. Introduction

La convection naturelle dans les espaces annulaires remplis de fluide et munis d'ailettes a été le sujet d'intérêt pour de nombreux chercheurs en raison de ses diverses applications. Ces recherches visent souvent à optimiser, du point de vue transfert de chaleur, les procédés industriels dans lesquels la géométrie annulaire est utilisée. Une investigation numérique sur les structures d'écoulement, les taux de transfert de la chaleur et la distribution des champs de température est envisageable pour cette optimisation. On dispose par ailleurs d'une bibliographie des travaux de recherche scientifique traitant le phénomène de la convection naturelle dans cette géométrie [1-3]. Dans le présent travail nous avons porté une attention particulière sur la détermination des effets thermoconvectifs, induits par la disposition de blocs chauffants au sein d'un espace annulaire rempli d'air ($Pr = 0.7$) et compris entre deux cylindres coaxiaux, horizontaux et isothermes. Ces blocs

visent à augmenter la surface de contact avec le fluide pour augmenter les échanges convectifs. Ils sont disposés sur le cylindre interne de rayon r_i (paroi chaude de température T_i) d'une manière symétrique par rapport au plan vertical contenant l'axe des cylindres. Le cylindre externe (paroi froide) de rayon r_o est maintenu à une température T_o ($T_o < T_i$). Le rapport de forme, $R = \frac{r_o}{r_i}$, entre les deux rayons des cylindres est égal à 2.

2. Modèle mathématique

La modélisation mathématique du problème présenté ci-dessus, est basée sur les principes de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la masse. Nous complétons le système obtenu par l'introduction des conditions aux limites sur les parois chaude et froide, et sur les frontières des blocs chauffants. Le fluide occupant l'espace annulaire est assimilable à un fluide visqueux incompressible, obéissant à l'approximation de Boussinesq. Pour des cylindres coaxiaux très longs, on peut négliger les effets de bord et considérer que le problème est bidimensionnel. Les équations adimensionnelles gouvernantes en formulation vorticité-fonction de courant sont données par :

$$\begin{cases} \Delta\psi + \omega = 0 \\ \frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = Pr\Delta\omega + RaPr\left(\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial T}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \Delta T \end{cases}$$

Pr et Ra sont respectivement les nombres de Prandtl et de Rayleigh, définis respectivement par :

$$Ra = \frac{\beta g(T_i - T_o)r_i^3}{\nu\alpha}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

- Sur la paroi interne :

$$r = 1: \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \omega = 0, \quad T = 1 \quad \forall\varphi$$

- Sur la paroi externe :

$$r = R: \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \omega = 0, T = 0 \quad \forall \varphi$$

- Sur la frontière des blocs chauffants :

$$1 \leq r \leq 1+h, \varphi = \varphi_{min} \text{ et } \varphi = \varphi_{max} :$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, T = 1, \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \omega = 0$$

$$r = 1+h, \varphi_{min} \leq \varphi \leq \varphi_{max} :$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, T = 1, \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \omega = 0$$

Les conditions de symétrie par rapport au plan vertical contenant l'axe des cylindres s'écrivent :

$$\varphi = 0 \text{ et } \varphi = \pi: \psi = 0, \omega = 0 \text{ et } \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad \forall r$$

Dans ces équations, la fonction de courant est reliée aux composantes radiale et angulaire de la vitesse adimensionnelle par les relations suivantes :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

L'intégration du système d'équations physiques est basée sur la discrétisation de ces équations par la méthode des différences finies centrées avec un schéma ADI. Ce qui nous amène à résoudre un système à matrices tri-diagonales, en utilisant un algorithme dérivé de la méthode de Gauss. L'initialisation des calculs est effectuée par l'introduction de champs nuls de la fonction de courant et de la vorticité, et un champ de température de conduction pure ($T = 1 - \frac{\ln r}{\ln R}$). Le taux de transfert de chaleur est caractérisé par le nombre de Nusselt global défini par :

$$Nug = -\frac{R}{\pi} \ln R \int_0^\pi \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} d\varphi$$

3. Résultats et discussion

Dans cette étude les résultats numériques sont obtenus pour une cavité cylindrique munie de blocs chauffants de faibles hauteurs adimensionnelles (par rapport à r_i) h variant de 0.07 à 0.140 et d'une largeur adimensionnelle (par rapport à πr_i) $l = 0.203$. La position angulaire des blocs, $\varphi_m = 0.82\pi$, est fixe. Le rapport de forme entre les deux cylindres coaxiaux est $R = 2$. Le nombre de Rayleigh, Ra , varie entre 10^3 et 10^4 . L'effet du régime d'écoulement sur le transfert de chaleur est étudié en fonction de Ra et de h .

3.1. Cas $h = 0.07$

Dans une première phase, l'introduction d'une hauteur relativement faible, $h = 0.07$, montre qu'un régime

monocellulaire est établi pour tous les nombres de Rayleigh considérés. Les lignes isothermes sont concentriques autour du centre de la cavité pour $Ra = 1000$, indiquant que l'intensité de l'écoulement au sein de l'espace annulaire n'est pas encore suffisante pour les déformer. Au fur à mesure que le nombre de Rayleigh augmente jusqu'à $Ra = 10\,000$, les lignes isothermes se distordent (fig. 1). Le nombre de Nusselt global, Nug , traduisant l'importance du taux de transfert de chaleur, augmente progressivement lorsque le nombre de Rayleigh croit (fig. 2).

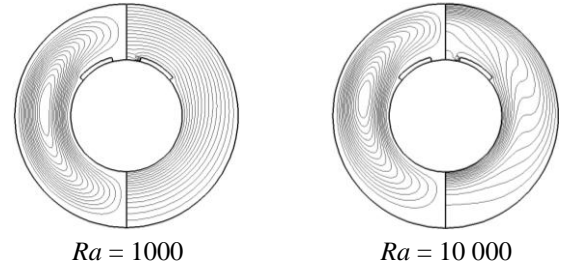


Figure 1 : Lignes de courant et isothermes pour $h = 0.07$.

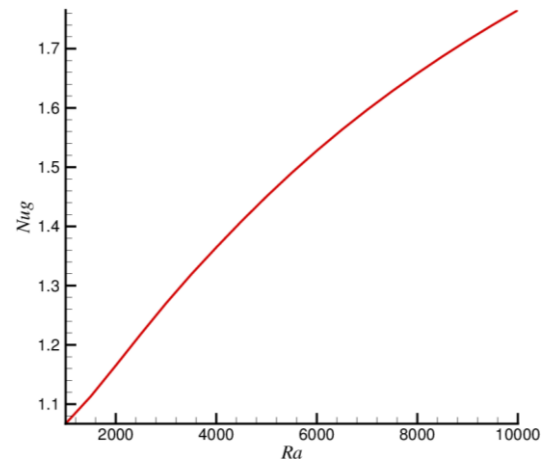


Figure 2 : Variation du nombre de Nusselt en fonction de Ra pour $h = 0.07$.

3.2. Cas $0.109 \leq h \leq 0.140$

Dans cette deuxième phase d'étude, on considère des hauteurs variables entre 0.109 et 0.140. On remarque que l'augmentation du nombre de Rayleigh conduit à une transition du régime monocellulaire vers un régime bicellulaire. Cette transition est observée lorsqu'une valeur critique d'apparition, Ra_{app} , du nombre de Rayleigh est atteinte. Le régime bicellulaire est caractérisé par l'existence de deux cellules de différentes tailles : la cellule principale occupe presque la totalité de l'espace annulaire, alors que la cellule secondaire se situe dans la partie sommitale au voisinage de la face radiale supérieure des blocs chauffants. L'intensité de la cellule secondaire reste extrêmement faible à sa première apparition, à Ra_{app} , par rapport à l'intensité de la cellule dominante et croit lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Sa taille est très petite à cette première

apparition (fig. 3a) et augmente progressivement avec le nombre de Rayleigh. En prenant en compte le rapport $Ri = (\psi_{min}/\psi_{max})$ des intensités d'écoulement maximales des cellules principale (ψ_{max}) et secondaire (ψ_{min}), la valeur de Ri est aussi très faible à la naissance de la cellule secondaire. Lorsqu'une valeur effective du nombre de Rayleigh, noté Ra_{eff} , est atteinte, une augmentation brusque de ce rapport est enregistrée (fig. 4 et tab. 1). L'intensité de la cellule supérieure ainsi que sa taille deviennent assez grandes (fig. 3b). En continuant d'augmenter le nombre de Rayleigh, l'intensité maximale et la taille de la cellule supérieure croissent simultanément.

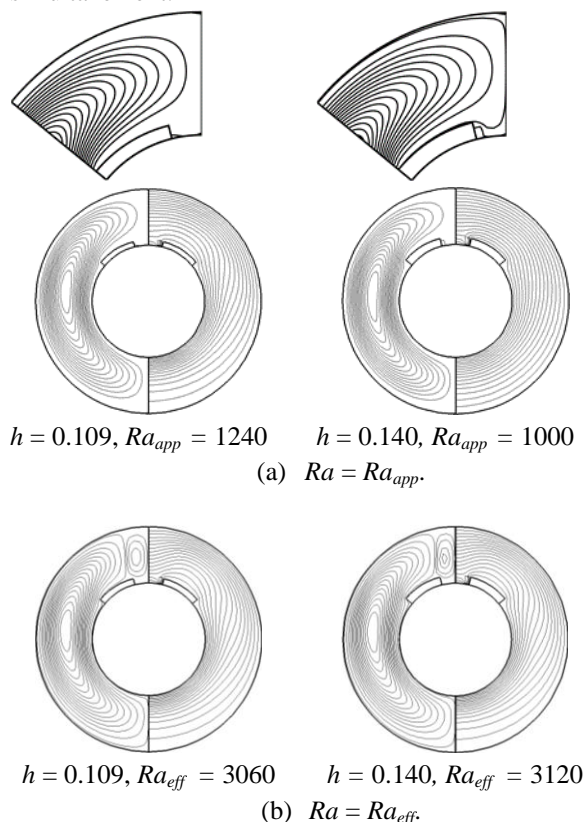


Figure 3 : Lignes de courant et isothermes.

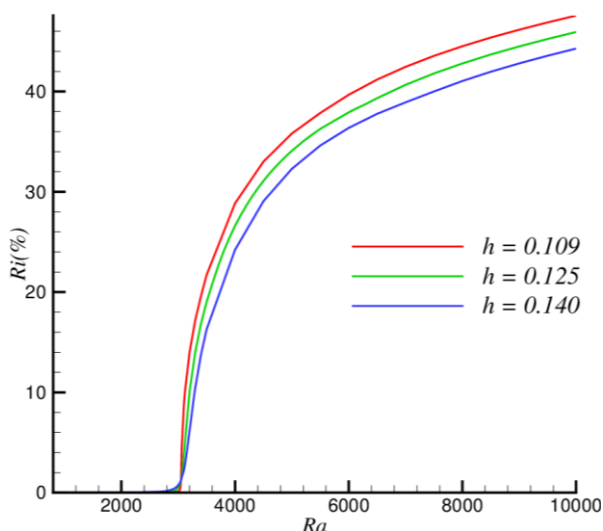


Figure 4 : Variation de Ri (%) en fonction de Ra .

Tableau 1 : Nombres de Rayleigh : Ra_{app} et Ra_{eff} et rapports d'intensités correspondantes

h	Apparition RBC		RBC effectif	
	Ra_{app}	Ri_{app} (%)	Ra_{eff}	Ri_{eff} (%)
0.109	1240	$1.35 \cdot 10^{-5}$	3060	1.296
0.125	1000	0.0036	3080	1.306
0.140	1000	0.01	3120	1.314

La figure 5 montre que le nombre de Nusselt global, Nug , varie dans un premier temps quasi-linéairement en fonction de Ra . Dès que la valeur effective du nombre de Rayleigh, Ra_{eff} , est atteinte, une montée de Nug est remarquée, où le transfert de chaleur subit un saut qui devient de moins en moins brusque lorsque la hauteur des blocs augmente. La différence entre le nombre de Rayleigh critique d'apparition et celui effectif croît légèrement avec l'augmentation de h (tab. 1).

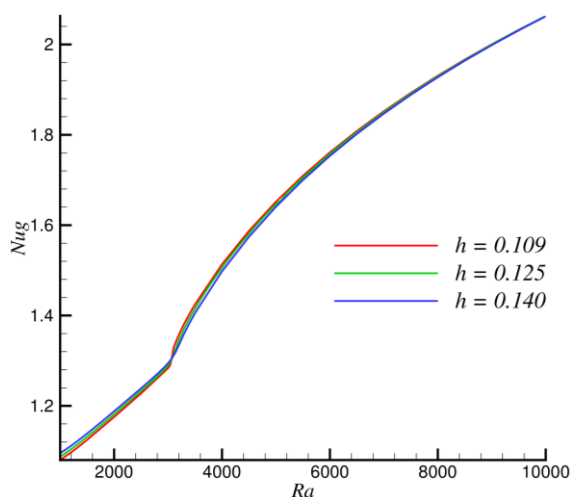


Figure 5 : Variation du nombre de Nusselt global en fonction de Ra .

4. Conclusion

Cette étude montre que l'apparition du régime bicellulaire est caractérisée par un nombre de Rayleigh critique Ra_{app} correspondant à la première apparition du régime RBC. Cette apparition n'a pratiquement pas d'effet sur le transfert de chaleur. Un accroissement sensible de Nug en fonction de Ra est mis en évidence à $Ra_{eff} > Ra_{app}$ et se traduit par l'augmentation du rapport d'intensité Ri . L'influence du régime RBC sur Nug devient alors significative.

Références

- [1] M. Farinas, A. Garon, K. Saint-Louis, *Study of heat transfer in a horizontal cylinder with fins*, Rev. Gén. Therm, 36 (1997) 398-410.
- [2] J. C. Chai, S. V. Patankar, *Laminar Natural convection in internally finned horizontal annuli*, Int. J. Numerical Heat Transfer, Part 4 vol. 24, (1993), pp. 6747,
- [3] A. Idrissi, A. Cheddadi, M.T. Ouazzani, *Heat transfer in annular space containing heating blocks with moderate heights multicellular flows*, Phys. Chem. News 75 (2015) 35-40.