

# ETUDE NUMERIQUE TRIDIMENSIONNELLE DES TRANSFERTS THERMIQUES COUPLES DANS UNE CAVITE CUBIQUE

B. JAMAL, M. BOUKENDIL, A. ABDELBAKI, Z. ZRIKEM

Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, Département de Physique, LMFE, Unité affiliée au CNRST (URAC 27), B.P. 2390, Marrakech, Maroc  
Auteur correspondant: m.boukendil@uca.ac.ma

## Résumé

Ce travail présente les résultats de la simulation numérique tridimensionnelle des transferts thermiques couplés par convection naturelle et conduction dans une cavité cubique entourée de parois solides. Les températures des parois verticales gauche et droite sont maintenues respectivement aux températures  $T_h$  et  $T_c$ . Toutes les autres parois de la cavité sont considérées adiabatiques. L'effet du rapport de forme ( $A_y=H/L$ ) sur la structure dynamique et thermique de l'écoulement, ainsi que sur le transfert de chaleur est discuté pour différentes valeurs de Rayleigh variant entre  $10^3$  et  $10^6$ . Les résultats obtenus montrent que le transfert de chaleur est très sensible à la variation du rapport de forme. En effet, plus le rapport de forme croît plus le flux de chaleur global augmente d'une manière importante au sein de la cavité cubique.

**Mots clefs:** *Simulation numérique tridimensionnelle; Convection naturelle; Conduction ; Cavité cubique*

## 1. Introduction

L'étude des transferts thermiques couplés par convection naturelle et conduction de chaleur dans les parois solides ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche en raison de leur implication dans divers problèmes industriels tels que les processus de chauffage, le refroidissement des bâtiments et les systèmes solaires. La revue de la littérature montre que la majorité des travaux publiés sur ce sujet considère des modèles bidimensionnels [1,2]. Cependant, dans plusieurs configurations pratiques, la troisième direction n'est pas assez longue pour que le modèle 2D soit valide. Pour cette raison, les configurations tridimensionnelles reçoivent une attention grandissante durant les deux dernières décennies. Dans ce cadre, de nombreuses recherches ont été effectuées sur la convection naturelle dans des cavités cubiques [3-5]. Cependant, les travaux traitant les transferts thermiques couplés par convection naturelle et conduction dans les parois solides dans une cavité cubique sont rares.

Pour cela, le présent travail est consacré à la simulation numérique tridimensionnelle des transferts thermiques couplés par convection naturelle et conduction dans une cavité cubique. L'effet du rapport de forme  $5 \leq A \leq 20$  sur les structures de l'écoulement d'air et sur les transferts de chaleur dans la cavité est présenté et analysé.

## 2. Problème physique et modèle mathématique

Le problème physique considéré est schématisé sur la figure 1. Il s'agit d'une cavité tridimensionnelle de largeur  $L$ , hauteur  $H$  et de profondeur  $W$  entourée par une matrice solide d'épaisseur  $l=h=h'$ . Les températures des parois verticales gauche et droite sont maintenues respectivement aux températures  $T_h$  et  $T_c$ . Toutes les autres parois de la cavité sont considérées adiabatiques. Le fluide est supposé newtonien et incompressible. La dissipation visqueuse est négligée dans l'équation de l'énergie et les propriétés thermophysiques sont supposées constantes et évaluées à une température de référence  $T_0=(T_h+T_c)/2$  sauf pour la masse volumique dans le terme de poussée où l'approximation de Boussinesq est adoptée.

L'écoulement d'air dans la cavité est supposé laminaire et le transfert de chaleur est tridimensionnel.

Les équations adimensionnelles traduisant la conservation de la masse, la quantité de mouvement et l'énergie en régime laminaire sont :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \\ = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} \\ = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) \\ + Ra \cdot Pr \cdot \theta_a \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \\ = -\frac{\partial P}{\partial Z} + Pr \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_a}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta_a}{\partial X} + V \frac{\partial \theta_a}{\partial Y} + W \frac{\partial \theta_a}{\partial Z} \\ = \frac{\partial^2 \theta_a}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_a}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta_a}{\partial Z^2} \end{aligned} \quad (5)$$

où  $(X, Y, Z)$  sont les positions adimensionnelles,  $\tau$  le temps adimensionnel,  $U, V, W, P$  et  $\theta_a$  sont les variables sans dimension associées respectivement aux composantes de la vitesse de l'air, à la pression et à la température de l'air.  $Ra$  est le nombre de Rayleigh et  $Pr$  celui de Prandtl.

L'équation adimensionnelle de la conduction de chaleur dans les parois solides est :

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} = \frac{\alpha_s}{\alpha_a} \left( \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial Z^2} \right) \quad (6)$$

où  $\theta_s$  est la température adimensionnelle du solide et  $\alpha_s$  sa diffusivité thermique.

Les conditions aux limites imposées aux frontières du domaine sont :

$U=V=W=0$  sur toutes les parois solides

- sur les surfaces verticales :

$$\theta_s(0, Y, Z) = 1 \text{ et } \theta_s(1, Y, Z) = 0$$

- sur les autres surfaces :

$$\left. \frac{\partial \theta_s}{\partial Y} \right|_{Y=0} = \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial Y} \right|_{Y=1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \theta_s}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial Z} \right|_{Z=1} = 0$$

Aux interfaces fluide-solide, on a :

$$\theta_s(X, Y, Z) = \theta_a(X, Y, Z) \text{ et } \frac{\partial \theta_s}{\partial n} = N_k \frac{\partial \theta_a}{\partial n}$$

Où  $\eta$  est la coordonnée adimensionnelle normale à l'interface considérée et  $N_k$  le rapport des conductivités.

Le flux thermique global adimensionnel qui traverse la structure est :

$$\begin{aligned} Q_a &= - \int_0^1 \int_0^1 \left. \frac{\partial \theta_s(Y, Z)}{\partial X} \right|_{X=0} dY dZ \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 \left. \frac{\partial \theta_s(Y, Z)}{\partial X} \right|_{X=1} dY dZ \end{aligned}$$

Les équations du modèle sont discrétisées par la méthode des volumes finis et résolues par l'algorithme SIMPLE. Afin de réaliser un compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats de la simulation, une étude

d'optimisation a été faite sur l'influence des pas d'espace et du temps. Cette étude a conduit au choix d'un maillage de  $41 \times 41 \times 41$  comme étant le plus convenable pour la présente étude et d'un pas de temps adimensionnel de  $10^{-4}$ . On estime que la convergence est atteinte lorsque les écarts relatifs sur toutes les variables calculées, aux différents nœuds du maillage, deviennent inférieurs à  $10^{-4}$  entre deux itérations successives.

### 3. Résultats et discussions

L'effet du rapport de forme sur les profils de vitesse adimensionnelle obtenus à mi-hauteur ( $Y=0.5$ ) et à mi-profondeur ( $Z=0.5$ ) de la cavité pour  $Ra=10^6$  est illustré sur la figure 2. La figure montre que la vitesse verticale  $V$  augmente d'une manière significative lorsque  $A_y$  varie de 5 à 20 et les profils de vitesse sont symétriques par rapport au centre de la cavité ainsi que pour tous les  $A_y$ , les extrêmes du profil de vitesses sont pratiquement égaux en valeurs absolues en une section donnée. On constate également que les profils de vitesse sont très sensibles aux variations du rapport de forme. En effet, une augmentation de ce paramètre augmente la vitesse de recirculation du fluide dans la cavité.

La figure 3 représente les profils de température obtenus à mi-hauteur ( $Y=0.5$ ) et à mi-profondeur ( $Z=0.5$ ) de la cavité pour  $Ra=10^6$  et pour différents rapports de forme  $A_y$ . Les résultats montrent que les profils de température sont indépendants du rapport de forme  $A_y$ . On remarque également que, l'effet de  $A_y$  sur le profil de température est pratiquement négligeable. On constate aussi qu'au  $X=0.17$ , la température décroît rapidement puis se stabilise pratiquement au-delà de  $0.3 \leq X \leq 0.65$  pour tous les rapports de forme. Cette diminution rapide de la température à proximité de la surface chaude résulte du transfert de chaleur important qui se produit lors du premier contact de l'air froid avec la face verticale intérieure gauche (partie chaude). Des remarques similaires peuvent être faites au niveau de la surface intérieure froide puisque l'écoulement est symétrique par rapport au centre de la cavité. D'après cette figure, on note que globalement à mi-hauteur de la cavité, les allures des profils obtenus sont pratiquement similaires pour tous les rapports de forme considérés ( $5 \leq A_y \leq 20$ ).

Pour mettre en évidence l'effet du facteur de forme  $A_y$  sur le transfert de chaleur global, on représente sur la figure 4, l'évolution du flux de chaleur global adimensionnel en fonction du nombre de  $Ra$  pour différents rapports de forme ( $5 \leq A_y \leq 20$ ). Les résultats de la figure 4 montrent l'effet important du rapport de forme  $A_y$  sur le flux de chaleur global. Ainsi, pour un nombre de Rayleigh  $Ra$  donné, le transfert de chaleur au sein de la configuration subit une augmentation très importante lorsque le rapport de forme  $A_y$

augmente. En effet, pour  $Ra=10^6$ , en passant de  $A_y = 5$  à  $A_y=20$ , l'augmentation du transfert de chaleur est de l'ordre de 71%. On note aussi que, le flux de chaleur global augmente avec le nombre de  $Ra$ , au début la croissance est faible puis importante lorsque le nombre de  $Ra$  dépasse  $10^5$  pour un rapport de forme  $A_y$  donné.

#### 4. Conclusion

Dans ce travail, une étude numérique tridimensionnelle des transferts thermiques couplés par convection naturelle et conduction au sein d'une cavité cubique est présentée. L'effet du rapport de forme ( $A_y=H/L$ ) sur la structure dynamique et thermique de l'écoulement, ainsi que sur le transfert de chaleur a été analysé. Les résultats ont montré que le transfert de chaleur croît d'une manière très importante quand le rapport de forme augmente. Soit une augmentation de l'ordre de 71% en passant de  $A_y = 5$  à  $A_y=20$ .

#### Références

- [1] D. Kaminski, and C. Prakash, *Conjugate natural convection in a square enclosure: effect of conduction in one of the vertical walls*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 29 (1986) pp. 1979–1988.
- [2] W. Zhang, C.H. Zhang and G. Xi, *Conjugate conduction-natural convection in an enclosure with time-periodic sidewall temperature and inclination*, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 32 (2010) pp. 52–64.
- [3] D. Lo, D. Young, K. Murugesan, C. Tsai and M. Gou, *Velocity-vorticity formulation for 3D natural convection in an inclined cavity by DQ method*, Int. J. Heat Mass Transfer 50 (2007) 479–491.
- [4] E. Tric, G. Labrosse and M. Betrouni, *A first incursion into the 3D structure of natural convection of air in a differentially heated cubic cavity*, from accurate numerical solutions Int. J. Heat Mass Transfer, vol.43 (2000) pp.4043–4056.
- [5] T. Fusegi, J.M. Hyun, K. Kuwahara and B. Farouk, *A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure*, Int. J. Heat Mass Transfer vol.34 (1991) pp.1543–1557.

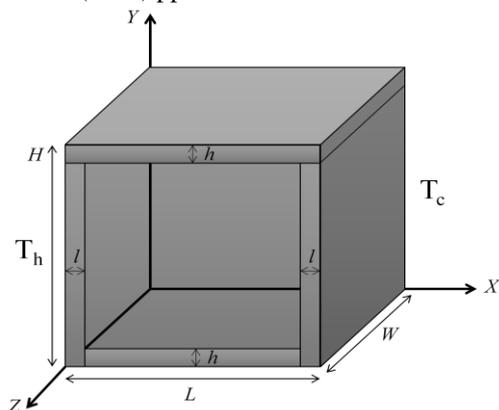


Figure 1: Configuration étudiée

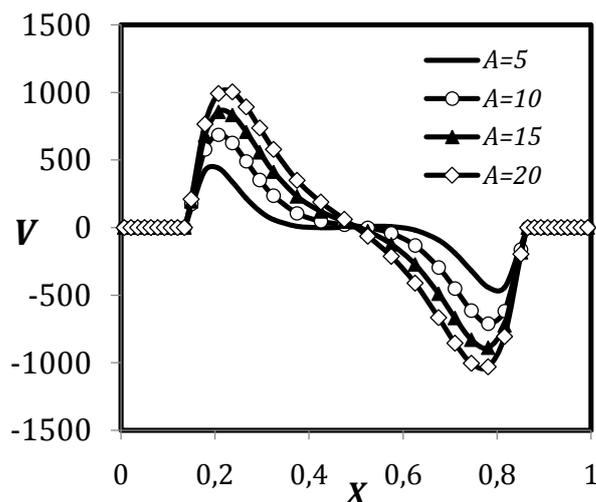


Figure 2 : Profils de la vitesse verticale en  $Y=Z=0.5$  obtenus pour  $Ra=10^6$  et différents rapport de forme  $A_y$

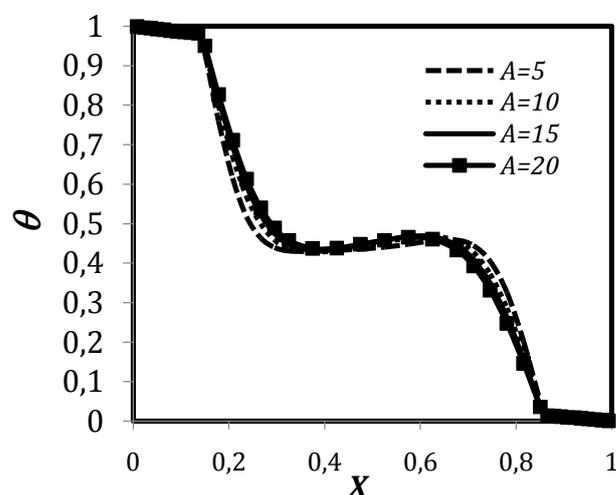


Figure 3 : Profils de température en  $Y=Z=0.5$  obtenus pour  $Ra=10^6$  et différents rapport de forme  $A_y$

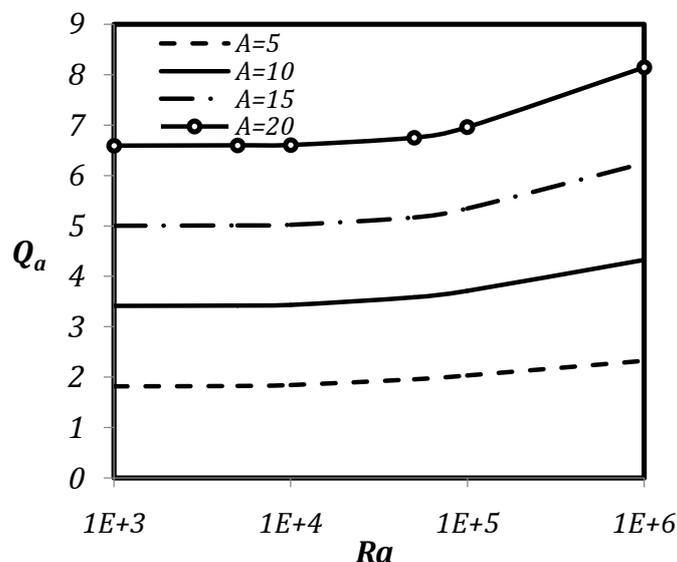


Figure 4 : variation du flux de chaleur global adimensionnel en fonction de  $Ra$  pour différents  $A_y$