

# Détection d'un défaut de type perte de rigidité dans une plaque par les ondes de Lamb

A. TALAMAKROUNI <sup>1</sup>, A. KHAMLICH <sup>2</sup>, K. AMEZIANE <sup>1</sup>

1. Laboratoire Physique de la Matière condensée, Faculté des Sciences, BP.2121, Tétouan 93002, Maroc

1. [asmae.talamakrouni@gmail.com](mailto:asmae.talamakrouni@gmail.com)

2. Laboratoire Systèmes de Communications et de Détection, Faculté des Sciences, BP.2121, Tétouan, Maroc

2. [khamlichi7@yahoo.es](mailto:khamlichi7@yahoo.es)

## Résumé

Pour la détection de petits défauts dans les plaques élastiques, des ondes élastiques guidées appelées ondes de Lamb sont souvent utilisées. Ces ondes de nature dispersive admettent plusieurs modes de propagation. Chaque mode a sa propre courbe de dispersion qui dépend des propriétés géométriques et matérielles de la plaque.

Dans le présent travail, nous avons utilisé les équations de Rayleigh-Lamb qui conduisent à l'existence d'un nombre infini de solutions qui correspondent aux modes de Lamb dans une plaque. Ces différents modes d'ondes dépendent des paramètres géométriques et matériels de la plaque. La présence d'un défaut géométrique ou matériel modifie les branches de dispersion et la vitesse du groupe. Ces informations sont alors utilisées pour identifier les caractéristiques du défaut. Nous avons développé un algorithme sous Matlab qui permet de calculer directement les vitesses de groupe d'ondes de Lamb en fonction de la fréquence et des paramètres de défaut. Ceci a permis de quantifier l'influence d'un défaut sur la forme de propagation des ondes de Lamb et de déterminer le changement subi par le temps de vol entre le point d'excitation et le point d'emplacement d'un capteur de mesure.

**Mots clés:** *plaque, défaut, ondes de Lamb, vitesse de groupe, courbes de dispersion*

## Introduction

Considérant le cas d'une structure linéaire homogène élastique isotrope en forme de plaque, les ondes ultrasonores supportent alternativement des réflexions répétées aux surfaces supérieure et inférieure de celle-ci. Lorsque l'épaisseur du matériau est plus faible que la longueur d'onde, l'onde est soumise à des contraintes mécaniques supplémentaires dues à la présence de la surface du fond. Il en résulte une onde appelée onde de Lamb [2]. Cette onde est dispersive car les vitesses de phase et de groupe dépendent de la fréquence de l'onde. L'analyse des ondes de Lamb qui se propagent dans une

structure de type plaque permet d'évaluer les dommages affectant cette plaque. Les ondes de Lamb se propagent sur de grandes distances, ce qui les rend bien adaptés pour la détection des dommages dans les plaques.

De nombreuses méthodes peuvent être utilisées pour générer les ondes de Lamb, par exemple en utilisant une irradiation laser. Dans ce cas, le chauffage local produit par l'énergie du laser crée des déformations thermoélastiques locales qui se propagent comme des ondes mécaniques avec un spectre caractéristique donné. Dans les plaques isotropes et homogènes, les ondes de Lamb peuvent être classées en trois types selon leurs polarisations. Ceux qui sont polarisés dans le plan perpendiculaire à la plaque sont appelés ondes symétriques (S) et ondes antisymétriques (A), alors que ceux polarisés dans le plan de la plaque sont appelés ondes de cisaillement horizontal (SH).

Dans ce travail, le calcul des vitesses de groupe s'effectue par une méthode analytique directe [1]. Ainsi la modification observée sur les vitesses de groupe des ondes Lamb dans la zone où se trouve un défaut pour une direction de propagation donnée peut être quantifiée. Cette information peut être utilisée pour évaluer l'influence d'un défaut sur la forme de propagation des ondes de Lamb, ce qui permet alors de déterminer le changement subi par le temps de vol entre un point d'excitation et un point d'emplacement d'un capteur.

## 1. Généralités sur les ondes de Lamb

Pour un solide homogène isotrope, les trois relations fondamentales de l'élasticité linéaire sont les suivantes:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho u_{i,tt} \quad (1)$$

où  $\sigma_{ij}$  désigne les composantes du tenseur des contraintes,  $f_i$  les composantes des forces volumiques,  $\rho$  la masse volumique du matériau et  $u_i$  les composantes du champ de déplacement  $\vec{u}$ .

La loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

où les  $C_{ijkl}$  sont les composantes du tenseur d'élasticité.

Dans le cas d'un matériau isotrope, le comportement élastique du solide peut être décrit par les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

En petites perturbations, la relation déplacement-déformation s'écrit:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

Les équations (1) à (3) permettent d'aboutir à la formulation en déplacement de Navier

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu_{j,ji} + \rho f_i = \rho u_{i,tt} \quad (4)$$

En se basant sur les équations de Navier on aboutit à deux équations de d'Alembert découplées pour les deux potentiels  $\varphi$  et  $\psi$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v_L^2}\varphi_{,tt} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\bar{\psi} - \frac{1}{v_T^2}\bar{\psi}_{,tt} = \bar{0} \quad (5)$$

La première équation correspond à la propagation d'une onde longitudinale (L). La vitesse de l'onde longitudinale est définie par la relation suivante

$$v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (6)$$

La deuxième équation concerne les ondes transversales (T). La vitesse de ces ondes est définie comme suit:

$$v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (7)$$

Considérons une plaque homogène isotrope d'épaisseur constante  $2h$ , de dimensions latérales infinies et placée dans le vide. Choisissons le système d'axes tel que le plan  $xy$  corresponde au feuillet moyen de la plaque dont la normale est dirigée suivant  $z$ . Supposons qu'à une pulsation donnée  $\omega$  la propagation se fait suivant l'axe des  $x$ . A cette pulsation est associée une longueur d'onde  $\ell$ . Dans le cas où l'épaisseur de la plaque est inférieure à cette longueur d'onde, des ondes de volume, dites ondes de Lamb vont se propager le long de la plaque [1].

Sous l'hypothèse de déformations planes (indépendance vis-à-vis de  $y$  qui n'est valable que pour les ondes de type (S) ou (A), cherchons des ondes harmoniques admettant des composantes de déplacement dans le plan  $xz$ . Ceci revient à rechercher la solution sous la forme:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi(z) \exp[i(kx - \omega t)] \\ \bar{\psi} &= \bar{\Psi}(z) \exp[i(kx - \omega t)] \end{aligned} \quad (8)$$

où  $k$  est le nombre d'onde,  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des amplitudes.

En exprimant la condition aux limites de surface libre de contraintes exprimée sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, nous aboutissons à la relation de dispersion de Rayleigh-Lamb qui mène à une infinité de modes de Lamb (S) ou (A) :

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} = 4k^2 q^2 \left[ 1 - \frac{p \tan(ph + \alpha)}{q \tan(qh + \alpha)} \right] \quad (9)$$

avec  $\alpha=0$  pour les ondes (S) et  $\alpha = \pi/2$  pour les ondes (A) et

$$p^2 = \frac{\omega^2}{v_L^2} - k^2, \quad q^2 = \frac{\omega^2}{v_T^2} - k^2 \quad (10)$$

L'équation de Rayleigh-Lamb n'admet pas de solution analytique. Pour la résoudre, des méthodes numériques sont utilisées. Elles permettent de trouver les couples  $(\omega, k)$  de chaque mode.

Nous utilisons ici une méthode permettant d'accéder rapidement aux courbes de dispersion des différents modes [2]. Ces modes ne dépendent que des vitesses longitudinale et transversale du matériau, lesquelles dépendent à leur tour des constantes de Lamé ou ce qui revient au même du module d'Young et du coefficient de Poisson.

Pour caractériser le phénomène de propagation d'onde multi chromatique telle que celle produite par irradiation laser par exemple, la vitesse de groupe ou vitesse d'énergie est introduite. Elle est définie par

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (11)$$

La vitesse de groupe peut être obtenue numériquement comme étant la pente locale de la branche de dispersion considérée  $(\omega, k)$ .

La vitesse de groupe permet de calculer le temps de vol de l'onde entre un point d'excitation et un point de réception. Ce qui permet de localiser le défaut.

Nous proposons ici de caractériser la zone de défaut par une chute de rigidité qui affecte localement le module d'Young ou ce qui revient au même les constante de Lamé. Cette modification est prise proportionnelle au pourcentage de la zone non encore occupée par le défaut sur l'épaisseur de la plaque, soit  $h - \eta$  où  $2\eta$  représente l'étendue du défaut sur l'épaisseur. Ainsi les vitesses des ondes longitudinale et transversale s'écriront:

$$v_L^* = \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}} = \sqrt{\frac{h - \eta}{h}} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \chi v_L \quad (12)$$

et

$$v_T^* = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho}} = \sqrt{\frac{h - \eta}{h}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \chi v_T \quad (13)$$

avec la quantité  $\chi = \sqrt{1 - \frac{\eta}{h}}$  qui caractérise la perte de rigidité due à l'anomalie.

## 2. Résultats et discussions

Un programme a été développé sous Matlab afin de calculer les vitesses de groupe en fonction de la direction de propagation en utilisant les équations (9), (10), (11) – (13). En utilisant ce programme, les vitesses de groupe ont été calculées pour deux plaques isotropes homogènes dont les propriétés sont données dans le tableau 1.

Matériaux	E ( GPa )	$\nu$	$\rho$ ( kg/m <sup>3</sup> )
Acier	210	0.3	7800
Aluminium	69	0.33	2730

Tableau 1: Propriétés matérielles des plaques utilisées

Ces deux plaques d'épaisseur  $h=1\text{mm}$  sont supposées le siège d'un défaut de perte de rigidité dont l'amplitude varie selon:  $\eta_1=0.0333$ ,  $\eta_2=0.05$  et  $\eta_3=0.1$ . D'où  $\chi_1=0.983$ ,  $\chi_2=0.975$  et  $\chi_3=0.949$ .

Le calcul des vitesses de propagation dans le cas d'une plaque saine ainsi que pour la plaque en présence du défaut de délaminage est présenté dans le tableau 2.

Niveau du défaut $\eta$	Acier		Aluminium	
	$v_L$	$v_T$	$v_L$	$v_T$
0	6020	3218	6120	3082
0.0333	5816	3109	5912	2978
0.0500	5711	3053	5805	2924
0.1000	5384	2878	5474	2757

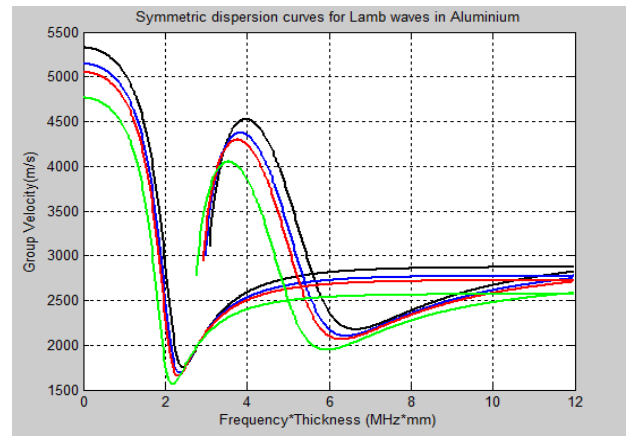
Tableau 2: Niveaux de défaut considérés et vitesses des ondes associées

La figure 1 présente la vitesse de groupe pour les modes (S) et (A) dans le cas du matériau acier. Seules les branches A0 et A1, S0 et S1 ont été présentées. Ces branches sont habituellement utilisées dans les analyses du fait qu'elles n'admettent pas de fréquence de coupure. Une variation importante de la vitesse de groupe est observée sur ces figures en fonction de l'amplitude du défaut. Cette variation se traduit par une modification du temps de vol des ondes qui est accessible expérimentalement. Le temps de vol est présenté dans le tableau 3 pour les branches S0 et A0.

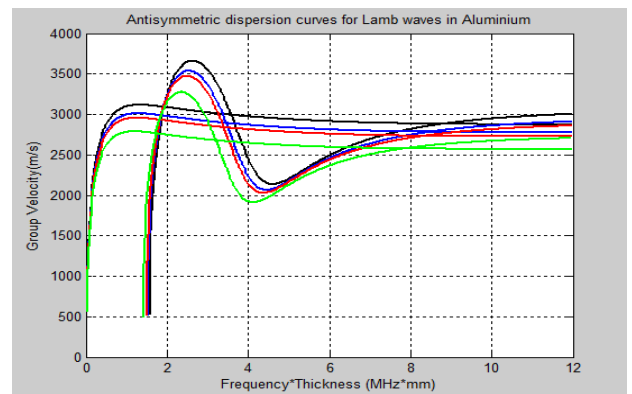
$\Delta t$ ( $\mu s$ )	Acier		Aluminium	
	(S0)	(A0)	(S0)	(A0)
0	30.84	56.43	32.09	57.24
0.0333	31.92	58.41	33.21	59.24
0.0500	32.50	59.48	33.82	60.35
0.1000	34.50	63.09	35.86	63.79

Tableau 3 : Temps de vol affecté par la présence d'un défaut en fonction de l'amplitude du défaut

Le tableau 3 montre que lorsqu'on augmente l'amplitude du défaut, le temps de vol augmente aussi. La variation est sensible. On peut utiliser cette mesure pour renseigner sur la présence d'une anomalie dans la plaque.



(a)



(b)

Figure 1: Comparaison des courbes de vitesse de groupe entre la plaque saine (en noir) et la plaque présentant un défaut (bleu  $\eta_1$ , rouge  $\eta_2$ , vert  $\eta_3$ )

(a) Modes S, (b) Modes A

## 3. Conclusion

Une technique de détection de défaut dans une plaque basée sur les ondes de Lamb a été présentée. Elle est fondée sur l'information concernant la vitesse de groupe et donc le temps de vol que subit l'onde à la traversée d'une zone d'anomalie.

Nous avons reliée explicitement pour un défaut de type perte de rigidité, les vitesses d'onde à la taille du défaut. La mesure expérimentale du temps de vol permettra alors de remonter à l'amplitude du défaut par résolution d'un problème inverse.

## Références

- [1] O. Xeridat, *Etude expérimentale de la propagation et de la localisation des ondes de Lamb*, Université Nice Sophia Antipolis, pp.27-38, 2011.
- [2] L.Wang, F.G. Yuan, *Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves: Modeling and experiment*, North Carolina State University, September 2006.
- [3] R. Sicard, *Nouvelles méthodes d'imagerie acoustique pour l'inspection des ondes de Lamb*, Thèse, Université du Québec à Trois-Rivières, Canada, pp.10-38. 2000.