

Analyse de la dynamique non linéaire des poutres à parois minces à sections variables et ouvertes subissant des grands déplacements et des grandes torsions par des solveurs homotopiques implicites d'ordre élevé -Etude comparative

A. El kaimBillah¹, O. Bourihane¹, B. Braikat¹, M. Jamal¹, F. Mohri², N. Damil¹

¹Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux (LIMAT), Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca, BP 7955, Sidi Othman, Casablanca, Maroc.

²Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3), Université de Lorraine.CNRS UMR 7239, Ile du Saulcy, 57 057 Metz, France.

Résumé

Une analyse des vibrations non linéaires forcées à grand déplacement et grande torsion des poutres à parois minces et à sections ouvertes variables sous chargements dynamiques externes arbitraires est présentée dans ce travail. Elle est effectuée par le biais de trois solveurs homotopiques implicites différents d'ordres élevés. Pour élucider leur performance et leur robustesse, une étude comparative de ces trois solveurs a été faite en se basant sur le coût de calcul CPU, le nombre d'inversions de la matrice tangente et le nombre de seconds membres et la qualité de leurs solutions. L'efficacité de ces trois solveurs et leur comparaison est testée sur le problème de vibrations non linéaires forcées d'une poutre en I à paroi mince et à section variable ouverte, soumise à deux excitations extérieures. Les résultats obtenus par ces trois solveurs sont aussi comparés avec ceux calculés par le code industriel Abaqus.

Mots clefs : *Poutre à parois minces, section ouverte variable, grand déplacement, grande torsion, dynamique non linéaire forcée, élément fini, schéma implicite de Newmark, perturbation, homotopie, solveur non linéaire.*

1. Introduction

L'utilisation des poutres à parois minces à section variable ouverte a augmenté dans de nombreux domaines allant de la construction civile aux structures mécaniques et aérospatiales. Pour améliorer le fonctionnement, le rendement et augmenter la durée de vie de ce type de structures, il est d'une grande importance d'analyser et de quantifier leur comportement dynamique non linéaire surtout quand celle-ci effectuent des grands déplacements et grandes rotations sous l'effet de chargements dynamiques extérieurs. Durant ces dernières années, des efforts considérables ont été consacrés à cette thématique de recherche. De nombreuses formulations et modélisations en éléments finis ont été proposées au cours des deux dernières décennies pour analyser les réponses dynamiques non linéaires de ces structures à parois minces et à sections variables ouvertes sous chargements et conditions aux limites variés [1]. On s'intéresse dans ce travail à l'étude des vibrations non linéaires forcées à grand déplacement et grande torsion des poutres à parois minces et à sections variables ouvertes soumises à des chargements dynamiques externes quelconques. Le comportement vibratoire non linéaire de ce type de structures est analysé

numériquement par trois solveurs homotopiques implicites d'ordre élevé proposés [2]. Ces solveurs sont développés en couplant les méthodes de discrétisation en espace (Eléments Finis), et en temps (schéma implicite de Newmark), un changement de variable, des techniques d'homotopie et de perturbation et enfin une procédure de continuation. Ils se différencient principalement par l'application de la transformation homotopique et du mode de perturbation. Trois types d'homotopies ont été considérées: i) Appliquer la transformation homotopique à la fois aux formes quadratiques et aux seconds membres des équations dynamiques, ii) Appliquer la transformation homotopique aux seconds membres seuls dans les équations dynamiques, iii) Appliquer la transformation homotopique aux formes quadratiques seules dans les équations dynamiques avec un développement qui débute de l'ordre 0. Un élément fini à deux nœuds et à sept degrés de liberté par nœud est considéré dans le processus du maillage de la structure. Ces solveurs, testés sur un problème de vibration non linéaire forcée d'une poutre en I à paroi mince et à section variable ouverte sous chargements dynamiques externes, ont été comparés en considérant le temps de calcul exigé, le nombre d'inversions de la matrice tangente effectué et des seconds membres mis en jeu et de la qualité des solutions.

Les résultats obtenus par ces trois solveurs sont aussi comparés avec ceux calculés par le code industriel Abaqus .

2. Position du problème et sa cinématique

Considérons une poutre à paroi mince à section variable ouverte, de longueur L, dans un repère 3D (Fig.1). Les axes y et z sont les axes principaux d'inertie de la section de la poutre et x l'axe longitudinale. Pour une section donnée, le centre de torsion C est repéré par ses coordonnées (y_C, z_C). Un point M de la section est défini par ses coordonnées (y, z, ω) où ω est la coordonnée sectorielle qui caractérise le gauchissement de la section en ce point. Les déplacements u_M, v_M et w_M du point M s'expriment en fonction des déplacements u, v et w de la projection du point M sur la ligne moyenne par les relations suivantes [4] :

$$\begin{cases} u_M(x, y, z) = u - y(v' \cos \theta_x + w' \sin \theta_x) \\ \quad \quad \quad - z(w' \cos \theta_x - v' \sin \theta_x) - \omega \theta'_x \\ v_M(x, y, z) = v - (z - z_c) \sin \theta_x + (y - y_c) (\cos \theta_x - 1) \\ w_M(x, y, z) = w - (y - y_c) \sin \theta_x + (z - z_c) (\cos \theta_x - 1) \end{cases} \quad (1)$$

le symbole (.)' indique la dérivée par rapport à x.

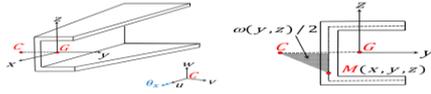


Figure. 1 : Cinématique de la poutre à paroi mince et à section ouverte variable.

3. Equations dynamiques de la structure

Les équations du mouvement sont obtenues via le théorème des puissances virtuelles :

$$\delta U + \delta T - \delta W_{ext} = 0 \quad (2)$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation, δT est la variation du travail des forces d'accélération et δW_{ext} est la variation du travail des forces extérieures.

4. SOLVEURS PROPOSES -METHODOLOGIE DE RESOLUTION

Les solveurs proposés pour résoudre les équations de la dynamique non linéaire sont développés en suivant les quatre étapes suivantes :

4.1 Discrétisation par éléments finis

L'application de la méthode des éléments finis, l'utilisation d'un élément à deux nœuds et à sept degrés de liberté par nœud, le choix des fonctions de forme linéaires pour le déplacement axial u , le choix des fonctions cubiques d'Hermite pour les composantes v , w et θ_x et la notation des déplacements nodaux par :

$$\{r\}_i^t = \langle u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad v' \quad w' \quad \theta_x' \rangle_i \quad (i=1,2)$$

Conduisent à un système d'équations non linéaire du type :

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C(\dot{\theta}, \dot{\theta})]\{\dot{r}\} + [K(\theta, \alpha)]\{r\} = \{F_{ext}\} \quad (3)$$

Où $[M]$ est la matrice de masse, $[C(\dot{\theta}, \dot{\theta})]$ est la matrice d'amortissement et $[K(\theta, \alpha)]$ est la matrice de rigidité non linéaire. $\{F_{ext}\}$ est le vecteur force extérieure.

4.2 Discrétisation temporelle

En écrivant les vectrices vitesses et d'accélération au temps $t = (n+1)\Delta t$ en utilisant le schéma implicite de Newmark comme suit:

$$\begin{aligned} \{\dot{r}^{n+1}\} &= b_0 \{\dot{r}^n\} + b_1 \{\ddot{r}^n\} + b_2 \{\ddot{r}^{n+1}\} \\ \{\ddot{r}^{n+1}\} &= a_0 \{\ddot{r}^{n+1}\} - a_2 \{\ddot{r}^n\} + a_1 \{\dot{r}^n\} - a_0 \{\dot{r}^n\} \end{aligned} \quad (4)$$

où $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ sont les coefficients de Newmark données dans [1].

4.3 Changement de variable

En introduisant le changement de variable suivant:

$$\{r^{n+1}\} = \{r^n\} + \{\Delta r\} \quad (5)$$

où $\{r^n\}$ est la valeur de l'inconnue calculée à l'instant précédent et $\{\Delta r\}$ est la nouvelle variable à déterminer. Le problème non linéaire vérifié par $\{\Delta r\}$ peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$[K_T]\{\Delta r\} + \{F_m(\Delta r, \Delta r)\} = \{SM\} \quad (6)$$

avec $[K_T]$ est la matrice de rigidité tangente, $\{F_m\}$ est le vecteur des formes non linéaire et $\{SM\}$ sont les seconds membres.

4.4 Technique d'homotopie

On introduit un pré-conditionneur $[K^*]$ et un paramètre de chemin artificiel « a » sans dimension physique. L'introduction du paramètre artificiel « a » a été faite de telle sorte que pour $a=0$, on obtient un problème linéaire facile à résoudre et pour $a=1$, on retrouve la solution du problème de départ (Eq.6). En appliquant cette transformation homotopique, le problème (Eq.10) peut être transformé selon le choix de la technique d'homotopies. Trois choix sont considérés dans ce travail.

4.4.1 Premier choix de la transformation homotopique-solveur.1

$$[K^*]\{\Delta r\} + a([K] - [K^*])\{\Delta r\} + a\{F_m(\Delta r, \Delta r)\} = a\{SM\} \quad (7)$$

-Technique de perturbation

Pour résoudre le problème non linéaire (Eq.7), on cherche les inconnues $\{\Delta r\}$ sous forme d'une série entière tronquée à un ordre p par rapport au paramètre de chemin noté « a » sous la forme :

$$\{\Delta r\} = a\{\Delta r_1\} + \dots + a^p\{\Delta r_p\} \quad a \in [0, a_{max}] \quad (8)$$

Le domaine de validité $[0, a_{max}]$ de la représentation en série (Eq.8) est estimé par une expression donnée en fonction de l'ordre de troncature p , d'un paramètre de précision ε et des seconds membres $\{F_{p+1}^n\}$ qui dépend des ordres précédents :

$$a_{max} = \left(\frac{\varepsilon}{\|F_{p+1}^n\|} \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (9)$$

En injectant (Eq.8) dans (Eq.7) et après une identification terme à terme, on obtient une séquence de problèmes linéaires à chaque ordre:

$$\text{à l'ordre } p=1 \quad [K^*]\{\Delta r_1\} = \{SM\} \quad (10)$$

$$\text{à l'ordre } p \geq 2 \quad [K^*]\{\Delta r_p\} = ([K^*] - [K_T])\{\Delta r_{p-1}\} - \{F_{p-1}^n\} \quad (11)$$

4.4.2 Deuxième choix de la transformation homotopique- solveur.2

$$[K^*]\{\Delta r\} + a([K] - [K^*])\{\Delta r\} + \{F_m(\Delta r, \Delta r)\} = a\{SM\} \quad (12)$$

-Technique de perturbation

Dans ce cas l'inconnue du problème non linéaire (Eq.12) est développée en série tronquée à l'ordre p par rapport au paramètre « a » ayant la forme de l'eq.8. Les termes $\{\Delta r_k\}$ de la série à chaque ordre sont solutions de la séquence des problèmes linéaires suivants :

$$\text{à l'ordre } p=1 \quad [K^*]\{\Delta r_1\} = \{SM\} \quad (13)$$

$$\text{à l'ordre } p \geq 2 \quad [K^*]\{\Delta r_p\} = ([K^*] - [K_T])\{\Delta r_{p-1}\} - \{F_{p-1}^n\} \quad (14)$$

4.4.3 Troisième choix de la transformation homotopique- solveur.3

$$[K^*]\{\Delta r\} + a([K] - [K^*])\{\Delta r\} + a\{F_m(\Delta r, \Delta r)\} = \{SM\} \quad (15)$$

-Technique de perturbation

Contrairement aux cas précédents, nous proposons dans

cette étape de développer l'inconnue $\{\Delta r\}$ du problème (Eq.15) sous forme d'une série entière à partir de l'ordre 0 non nul tronquée à un ordre p par rapport au paramètre « a » sous la forme :

$$\{\Delta r\} = a\{\Delta r_0\} + \dots + a^p\{\Delta r_p\} \quad a \in [0, a_{\max}] \quad (16)$$

En insérant l'Eq.16 dans le problème transformé (Eq.15) et en identifiant chaque terme selon les puissances du paramètre de perturbation on obtient une séquence de problèmes :

à l'ordre $p = 0$ $[K^*]\{\Delta r_0\} = \{SM\}$ (17)

à l'ordre $p \geq 1$ $[K^*]\{\Delta r_p\} = ([K^*] - [K_T])\{\Delta r_{p-1}\} - \{F_p^{nl}\}$ (18)

5. VIBRATION NON LINEAIRE D'UNE POUTRE H BI-SYMETRIQUE SOUS CHARGEMENTS DYNAMIQUE

Considérons une poutre profilée en I, de longueur $L=8m$, de module d'Young $E=210GPa$ de coefficient de Poisson $\nu=0.3$ et de masse volumique $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$. La poutre est encastree-libre et soumise à deux chargements dynamique $F_y = 10\lambda(t)$ et $F_z = 20\lambda(t)$ à l'extrémité libre. Les caractéristiques géométriques de la poutre sont présentées dans la figure 3 (a et b)

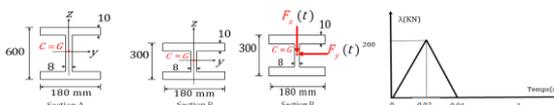


Figure.3 : Poutre en I- Sollicitation et caractéristiques géométriques

La poutre est discrétisée en 20 éléments. On fait l'analyse dynamique jusqu'à $t = 1s$, avec un pas de temps $\Delta t = 0.001s$. On adopte les paramètres suivants : l'ordre de troncature $N_{\text{ordre}} = 10$ et une tolérance de $\epsilon = 10^{-6}$. Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats de la simulation sous Abaqus. On discrétise la poutre en $(30 \times 2 \times 3 = 180)$ éléments coques « S8R ». Les courbes déplacements en fonction du temps sont données dans les figures .4.

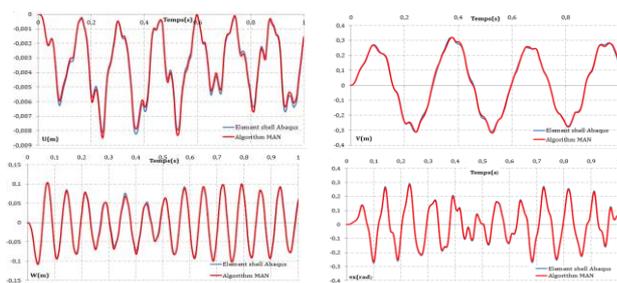


Figure.4 : Vibration non linéaire d'une poutre en I sous chargements constant :(a) (Évolution de u en fonction du temps) (b) (Évolution de v en fonction du temps) (c) (Évolution de w en fonction du temps) et (d) (Évolution de θ_x en fonction du temps)

Les tableaux suivant représentent l'influence de l'ordre de troncature, le pas du temps sur le temps de calcul, le nombre d'inversions de la matrice tangente et la qualité de solution pour les trois choix d'homotopie.

$\epsilon=10^{-4}$	Solveur 1			Solveur 2			Solveur 3		
	Δt			Δt			Δt		
N=12	5.10^{-4}	10^{-3}	2.10^{-3}	5.10^{-4}	10^{-3}	2.10^{-3}	5.10^{-4}	10^{-3}	2.10^{-3}
CPU(s)	3740	2110	1766	3604	2007	1425	3136	1720	1302
IM	231	511	785	220	470	712	196	433	620
SM(10^3)	24	12	6	24	12	6	24	12	6
Max résidu	-5.83	-5.82	-5.81	-5.86	-5.84	-5.83	-5.85	-5.84	-5.83

Tableau .1 : Influence du pas du temps

$\epsilon=10^{-4}$	Solveur 1			Solveur 2			Solveur 3		
	ordre			ordre			ordre		
$\Delta t=10^{-3}$	10	12	15	10	12	15	10	12	15
CPU(s)	1232	810	480	1256	617	450	896	560	339
IM	860	523	311	792	402	298	580	365	221
SM(10^3)	12	12	12	12	12	12	12	12	12
Max résidu	-4.70	-5.82	-5.83	-5.20	-5.84	-5.85	-5.80	-	-5.88
								5.8	
								4	

Tableau .2 : Influence de l'ordre de troncature

6. CONCLUSION

Ce travail a fait l'objet d'une étude de la dynamique non linéaire des poutres à parois minces et à sections variables ouvertes à grands déplacements et grandes torsions sous chargements arbitraires extérieurs. Le comportement dynamique de ce type de structure chargée a été analysé moyennant trois solveurs homotopiques implicites d'ordre élevé. Les solveurs, qui se différencient par le choix de la technique d'homotopie, ont été testés sur une poutre en I à parois minces et à section variable ouverte sur laquelle s'exercent deux chargements dynamiques. Les résultats obtenus par ces trois solveurs ont été comparés à ceux calculés par le code Abaqus. La comparaison des trois solveurs montre que les trois derniers ont donné la même qualité de solutions mais, le troisième solveur est beaucoup plus meilleur que les deux premiers vis-à-vis du temps de calcul, des nombre d'inversions de matrices et de seconds membres.

7. REFERENCES

[1] O. Bourihane, B. Braikat, M. Jamal, F. Mohri and N. Damil, *Dynamic analysis of a thin-walled beam with open cross section subjected to dynamic loads using a high-order implicit algorithm*, Engineering Structures, 120 (2016) 133–146.
 [2] M. Jamal, B. Braikat, S. Boutmir, N. Damil and M. Poitier Ferry, *A high order implicit algorithm for solving instationary nonlinear problems*, Comput Mech,28(2002)375-80