

# Etude de la stabilité linéaire des ondes interfaciales tridimensionnelles soumises à des perturbations sous-harmoniques

N. ALLALOU<sup>1,2</sup>, M. DEBIANE<sup>2</sup>, C. KHARIF<sup>3</sup>

1. Université M'Hamed Bougara de Boumerdes, Département de Physique, Avenue de l'Indépendance, Boumerdes 35000, Algeria, email : nallalou@univ-boumerdes.dz
2. Faculté de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, B.P. 32 El Alia, Algiers 16111, Algeria, email : mdebiane@yahoo.fr
3. Aix-Marseille University, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE, Marseille, France

## Résumé :

L'étude de la stabilité des ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs infinies soumises à des perturbations sous-harmoniques infinitésimales a été entreprise. L'écoulement de base est généré par l'interaction oblique de deux trains d'ondes de même caractéristiques. Via la méthode des perturbations, une solution numérique jusqu'à l'ordre 27 a été calculé. Puis l'étude de la stabilité linéaire des ondes interfaciales soumises à des perturbations tridimensionnelles a été étudié pour trois configurations : (a) ondes proches des ondes interfaciales stationnaires, (b) ondes interfaciales pleinement tridimensionnelles et (c) ondes proche des ondes interfaciales progressives. Cette étude révèle que l'instabilité dominante appartient à la classe I et elle est de caractère tridimensionnelle.

**Mots clés :** *Onde interfaciale tridimensionnelle ; Méthode des perturbations ; Instabilité sous-harmonique ; Méthode de Galerkin*

## 1 Introduction

Les ondes internes se développent à l'interface de deux fluides de densités différentes. Elles bénéficient indéniablement d'un regain d'intérêt depuis une vingtaine d'années dans la communauté scientifique internationale. Ceci est directement lié aux limites qu'atteignent actuellement les modèles océaniques. La compréhension des ondes internes au niveau fondamental est passée par une phase d'idéalisation où les formes bidimensionnelles ont été considérées pendant longtemps comme modèle de base pouvant décrire ces ondes. Cependant, ceci n'est généralement pas le cas dans la réalité et l'étude des champs de vagues tridimensionnelles est essentielle pour une description plus réaliste. La forme la plus simple de ces vagues est celle résultant de l'interaction de deux trains d'ondes de même caractéristiques. Le champ d'onde ainsi obtenu est périodique suivant

deux directions distinctes du plan horizontal. Dans notre cas, les ondes interfaciales tridimensionnelles sont obtenues par la réflexion d'un train d'ondes interfaciales sur une proi verticale. Le paramètre  $\theta$  est l'angle entre la direction de l'onde incidente et la normale au mur. Si  $\theta = 0$ , on obtient une onde interfaciale stationnaire. Pour  $\theta = \pi/2$ , il s'agit de la superposition de deux trains d'ondes dans la même direction et on obtient une onde interfaciale progressive. La méthode utilisée pour résoudre le problème est celle des perturbations. En utilisant le logiciel du calcul formel MAPLE, une solution analytique d'ordre 4 a été calculée, puis une extension numérique jusqu'à l'ordre 27 a été réalisée (voir [1]). Par ailleurs, [2], [3] ont étudié la stabilité linéaire des ondes interfaciales soumises à des perturbations superharmoniques infinitésimales. Ils ont montré que les instabilités superharmoniques s'identifient à des résonances harmoniques, comme les ondes de surface tridimensionnelles. Les résultats obtenus mette en évidence un rapport des densités au voisinage de 0.06 pour lequel le taux d'amplification est maximal. De plus une re-stabilisation est observée pour un rapport des densités autour de 0.36. Le but de ce travail est d'étendre l'étude de la stabilité aux cas des perturbations sous-harmonique. Il s'agit en particulier d'analyser l'influence de l'angle  $\theta$  sur le taux d'amplification.

## 2 Formulation du problème

On considère le problème de la propagation avec une célérité constante d'ondes internes de gravités à courtes crêtes à l'interface de deux fluides homogènes, de profondeurs finies, non-visqueux et incompressibles. Nous désignons par  $\rho_1$  et  $d_1$  la densité et la profondeur de la couche supérieure du fluide et par  $\rho_2$  et  $d_2$  celles de la couche inférieure.

On définit un repère mobile  $\mathfrak{R}^*(O^*, x^*, y^*, z^*, t)$  déplaçant à la vitesse de l'onde de base. Les variables  $x^*, y^*$

et  $z^*$  sont défini par :

$$\begin{cases} x^* = x - ct \\ y^* = y \\ z^* = z \end{cases} \quad (1)$$

où  $(x, y, z, t)$  sont les variables dans le repère fixe et  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde base. En enlevant l'asterisk pour simplification, le système d'équations dans le repère  $\mathfrak{R}^*$  est le suivant :

$$\begin{cases} \phi_{ixx} + \phi_{iyy} + \phi_{izz} = 0 & z \geq \eta \text{ pour } i = 1 \\ \text{et } z \leq \eta \text{ pour } i = 2 \\ \eta_t + \phi_{ix}\eta_x + \phi_{iy}\eta_y - \phi_{iz} = 0 & (i = 1, 2) \quad z = \eta \\ \mu \left[ \phi_{1t} + \eta + \frac{1}{2}(\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2 + \phi_{1z}^2) - \frac{1}{2}(\omega/m)^2 \right] - \\ \left[ \phi_{2t} + \eta + \frac{1}{2}(\phi_{2x}^2 + \phi_{2y}^2 + \phi_{2z}^2) - \frac{1}{2}(\omega/m)^2 \right] = 0 \\ \phi_{1z} = 0 \quad z \longrightarrow \infty \text{ et } \phi_{2z} = 0 \quad z \longrightarrow -\infty \end{cases} \quad (2)$$

avec  $m = \sin \theta$ ,  $\eta$  est l'élévation de l'interface et  $\phi_i$  ( $i=1,2$ ) représentent les potentiels des vitesses des couches supérieure et inférieure respectivement.

L'étude de la stabilité linéaire consiste à superposer à l'écoulement de base des perturbations instationnaires périodiques d'amplitudes infinitésimales. On décompose ainsi le mouvement comme la somme d'une solution permanente et d'une perturbation :

$$\begin{cases} \eta(x, y, t) = \bar{\eta}(x, y) + \eta'(x, y, t) \\ \phi_i(x, y, z, t) = \bar{\phi}_i(x, y, z) + \phi'_i(x, y, z, t) \\ (i = 1, 2) \end{cases} \quad (3)$$

où  $\bar{\eta}(x, y)$  et  $\bar{\phi}_i(x, y, z)$  sont les solutions de formes permanentes dans  $\mathfrak{R}^*$  et  $\eta'(x, y, t)$  et  $\phi'_i(x, y, z, t)$  les perturbations avec :

$$\eta'(x, y, t) \ll \bar{\eta}(x, y) \quad \text{et} \quad \phi'_i(x, y, z, t) \ll \bar{\phi}_i(x, y, z) \quad (4)$$

En substituant les relations (3) dans le système d'équations (2) et en développant les potentiels des vitesses  $\phi_1$  et  $\phi_2$  autour de  $z = \bar{\eta}(x, y)$  ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles, on obtient à l'ordre zéro les solutions de l'écoulement de base exprimé dans le repère mobile. Les détails de calculs sont donnés dans [1].

A l'ordre 1 on obtient le système d'équations aux perturbations :

$$\begin{aligned} \phi'_{ixx} + \phi'_{iyy} + \phi'_{izz} = 0 & \quad z \geq \bar{\eta} \text{ pour } i = 1 \\ \text{et } z \leq \bar{\eta} \text{ pour } i = 2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \phi'_{iz} - (\bar{\eta}_x \phi'_{ix} + \eta'_x \bar{\phi}_{ix}) - (\bar{\eta}_y \phi'_{iy} + \eta'_y \bar{\phi}_{iy}) \\ - \eta'(\bar{\eta}_x \bar{\phi}_{ixz} + \bar{\eta}_y \bar{\phi}_{iyz}) + \eta' \bar{\phi}_{zz} - \eta'_t = 0 \\ (i = 1, 2) \quad z = \bar{\eta}(x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mu \left[ \eta' + \phi'_{1t} + \bar{\phi}_{1x} \phi'_{1x} + \bar{\phi}_{1y} \phi'_{1y} + \bar{\phi}_{1z} \phi'_{1z} \right. \\ \left. \eta' (\bar{\phi}_{1x} \bar{\phi}_{1xz} + \bar{\phi}_{1y} \bar{\phi}_{1yz} + \bar{\phi}_{1z} \bar{\phi}_{1zz}) \right] \\ - \left[ \eta' + \phi'_{2t} + \bar{\phi}_{2x} \phi'_{2x} + \bar{\phi}_{2y} \phi'_{2y} + \bar{\phi}_{2z} \phi'_{2z} \right. \\ \left. + \eta' (\bar{\phi}_{2x} \bar{\phi}_{2xz} + \bar{\phi}_{2y} \bar{\phi}_{2yz} + \bar{\phi}_{2z} \bar{\phi}_{2zz}) \right] = 0 \\ z = \bar{\eta}(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\phi'_{1z} = 0 \quad z \longrightarrow \infty \quad \text{et} \quad \phi'_{2z} = 0 \quad z \longrightarrow -\infty \quad (8)$$

On cherche des solutions des équations de Laplace (5) vérifiant les conditions aux limites (6), (7) et (8). On choisit des solutions de la forme :

$$\begin{cases} \eta' = e^{-i\sigma t} e^{i(px+qy)} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} a_{JK} e^{i(J\alpha x + K\beta y)} \\ \phi'_1 = e^{-i\sigma t} e^{i(px+qy)} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} b_{JK} e^{i(J\alpha x + K\beta y)} e^{-\gamma_{JK} z} \\ \phi'_2 = e^{-i\sigma t} e^{i(px+qy)} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} c_{JK} e^{i(J\alpha x + K\beta y)} e^{\gamma_{JK} z} \end{cases} \quad (9)$$

En portant les séries (9) et leurs dérivées spatiales et temporelles, tronquées aux ordres  $M$  et  $N$  dans les équations aux perturbations (6) et (7), et en utilisant une méthode numérique de type *Galerkin*, la résolution des équations se réduit à celle d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = i\sigma\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (10)$$

où  $\mathbf{u} = [a_{JK}, b_{JK}, c_{JK}]^t$  est le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\sigma$ . Les matrices complexes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  dépendent de l'onde de base et des nombres d'onde  $p$  et  $q$ .

avec  $\gamma_{JK} = [(p + J\alpha)^2 + (q + K\beta)^2]^{1/2}$ ,  $\alpha = \sin \theta$  et  $\beta = \cos \theta$ .

### 3 Résultats et discussion :

Lorsque la longueur d'onde de la perturbation dans la direction  $(Ox)$  (respectivement  $(Oy)$ ) est supérieure à celle de l'onde de base dans la direction  $(Ox)$  (respectivement  $(Oy)$ ), l'instabilité est dite *sous-harmonique* dans la direction  $(Ox)$  (respectivement  $(Oy)$ ). La recherche des zones instables est effectuée aux voisinages des courbes de résonance linéaire ( $h = 0$ ). Compte tenu de la symétrie de ces courbes, nous avons limité notre recherche des points instables dans les plans  $(P, Q) > 0$ . Les figures 1(a)-(b) montrent les diagrammes de stabilité de la classet I(b) pour  $\theta = 80^\circ$  et deux valeurs de la cambrure,  $h = 0.1$  et  $h = 0.2$ . Pour une cambrure très faible, la zone instable se développe au voisinage de la courbe de résonance linéaire  $h = 0$ . Au fur et à

mesure que la cambrure augmente, les zones instables augmentent aussi entraînant leur fusion.

Sur la (2 (a)) sont portées les évolutions du taux maximal des sous-classes I(a), I(b), II(a) et II(b) en fonction de la cambrure pour un rapport des densités  $\mu = 0.1$ . L'instabilité modulationnelle de caractère tridimensionnelle sous-harmonique de classe I(a) est dominante.

Dans la (2 (b)) nous avons reporté l'ensemble de nos résultats relatifs à cet angle pour  $\mu = 0.1$  et  $\theta = 40^\circ$ . Pour cet angle l'instabilité dominante est de classe I(b) pour cette une valeur de  $\mu = 0.1$ . Cette instabilité est de caractère tridimensionnelle et sous-harmonique dans les deux directions  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

Sur la figure (2 (c)), nous avons représenté les maxima du taux d'amplification des classes I(a), I(b), II(a) et II(b) pour  $\mu = 0.1$ . L'analyse de ces résultats montre que l'instabilité de classe I(a) est dominante et se produit pour  $q \approx 0$ . Les instabilités de classe I(a) génèrent des modulations sous-harmoniques dans la di-

rection de  $(Ox)$  et quasi-superharmoniques dans celle de  $(Oy)$  ( $p \neq 0$  et  $q \approx 0$ ).

## Références

- [1] N. Allalou, M. Debaine, C. Kharif, *Three-dimensional periodic interfacial gravity waves : analytical and numerical results*, European Journal of Mechanics-B/Fluids, vol. 30, no 4 (2011) 371-386.
- [2] N. Allalou, *Contribution à l'étude des ondes internes tridimensionnel*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB), année 2013.
- [3] N. Allalou, M. Debaine, C. Kharif, *On the superharmonic instability of nonlinear three-dimensional interfacial waves of two infinite layers*, European Journal of Mechanics B/Fluids 59 (2016) 135-139.

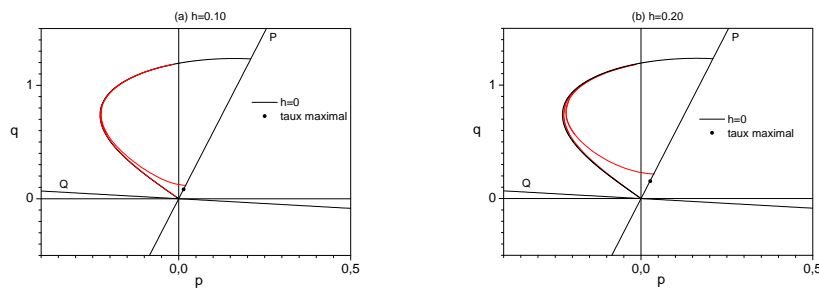


FIG. 1 – Diagramme de stabilité dans le plan  $(p, q)$  de la classe I pour  $\theta = 80^\circ$  et  $\mu = 0.1$  : (a)  $h = 0.1$ , (b)  $h = 0.2$ .

