

INSTABILITÉ THERMIQUE AU SEIN D'UN SYSTÈME DE DEUX COUCHES FLUIDES MISCIBLES EN PRÉSENCE D'UN GRADIENT DE TEMPÉRATURE

M. ECHCHADLI¹, S. ANISS¹

1. Université Hassan II - Casablanca, Faculté des Sciences Aïn Chock, Laboratoire de Mécanique, B.P.5366 Maarif, Casablanca, Maroc. Email : mourad.echchadli@gmail.com

Résumé :

Nous considérons, dans ce travail, un système à deux couches fluides, confiné entre deux plaques planes horizontales qui sont maintenues à des températures uniformes. La température de la plaque inférieure étant supérieure à celle de la plaque supérieure. L'étude de stabilité de ce système a été faite, dans la littérature, dans le cas des grandes valeurs du nombre de Prandtl, nombre adimensionnel caractérisant le rapport du temps caractéristique de diffusion thermique au temps caractéristique de diffusion visqueuse. Nous examinons dans de ce travail l'effet du nombre de Prandtl, ayant des valeurs finis, sur le seuil de convection en tenant compte de la déformation de l'interface séparant les deux couches fluides.

Mots clés : *Système à deux couches, Convection thermique, Fluides miscibles,*

1 INTRODUCTION

La modélisation des instabilités thermiques au sein d'un système, à deux couches fluides miscibles horizontales, chauffé par le bas est d'une grande importance. On retrouve cette configuration dans une large gamme de problèmes en Géophysique (manteau terrestre). Le nombre de Prandtl défini comme le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique, est souvent considéré de l'ordre de l'unité ou supérieur à l'unité [1, 5]. Le seuil de convection dans un manteau terrestre, où le rapport de densité augmente avec la profondeur résultant des changements dans la composition chimique, a été étudié d'abord dans [1] ensuite dans [5], dans le cas d'un système composé de deux couches fluides miscibles et chauffé par le bas. En effectuant une analyse de stabilité linéaire dans le cas où les propriétés physiques des deux fluides tels que la viscosité, la diffusivité thermique, le coefficient de dilatation thermique, excepté la densité, sont égaux, il a été montré que la convection a lieu séparément dans chacune des deux couches fluides et que la convection est oscillante avec instabilité de l'interface, la première instabilité est due à la différence de température et l'autre est due à la différence de densité. Il a été montré aussi que la convec-

tion est stationnaire lorsque le nombre de Rayleigh, basé sur la différence de température, est supérieur à 5000, et elle est oscillante lorsqu'il est inférieur à 5000. L'étude du régime oscillatoire, où l'interface est déformée et où la convection est développée dans toute le système, a été traitée par Olson et *al.* [2] qui ont effectué une étude expérimentale et ont observé que l'interface est déstabilisée au voisinage d'une valeur critique du nombre adimensionnel de flottabilité basé sur une différence de densité. Par la suite, Olson et *al.* [3] ont effectué une analyse de stabilité linéaire en introduisant les termes dus aux effets de viscosité. Ils ont ainsi montré que les prévisions faites à partir de l'analyse linéaire de stabilité sont conformes aux mesures expérimentales. Motivés par un intérêt en géophysique, des expériences de laboratoire ont été récemment réalisées pour déterminer l'influence du contraste de viscosité, sur la stabilité des deux couches fluides miscibles dans le cas où il n'y a aucune tension superficielle à l'interface. Dans la situation où l'on a de très grandes valeurs du nombre de Rayleigh thermique et du nombre de Prandtl [4], les régimes suivants ont été observés : pour $B > 1$ la convection thermique se développe dans les deux couches superposées, alors que pour $B < 0.35$, l'interface se déforme dans de grands dômes qui se déplacent quasi-périodiquement. Par ailleurs le Bars et Davaille [5] se sont concentrés sur le régime où l'interface se déforme largement et les mouvements se propagent sur toute la profondeur du système. Ils ont utilisé une analyse de stabilité linéaire et des expériences en laboratoire, dans le cas où le rapport de viscosité est supérieur à 5, pour étudier davantage la stabilité et l'existence de deux régimes de convection l'un stationnaire et l'autre oscillant, en fonction du rapport de viscosité, de la profondeur et du rapport de densité. Ils ont montré que le régime oscillant existe lorsque le nombre de flottabilité, B , est inférieur à une valeur critique; $B_c = 0.302$. Dans ce travail et contrairement, aux travaux cités au dessus, nous gardons les termes inertiels liés à ce nombre, et nous effectuons une analyse de stabilité linéaire en nous focalisant sur l'effet du nombre de Prandtl sur le seuil de convection.

2 FORMULATION

On considère un système à deux couches fluides, miscibles, visqueuses et incompressibles, d'épaisseurs, d_i , de densités, ρ_i , et de viscosités cinématiques, ν_i avec $i = 1, 2$. Les indices 1 et 2 se rapportent respectivement aux fluides inférieur et supérieur. Les deux fluides sont confinés entre deux plaques planes horizontales qui sont maintenues à des températures uniformes distinctes T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$ (Figure 1).

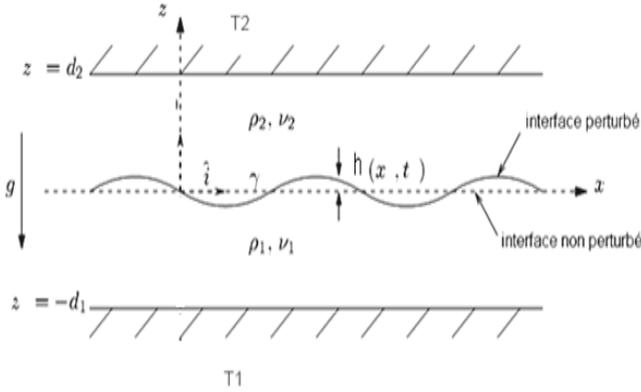


FIGURE 1 – illustration du système

Les équations de mouvement, l'équation de conservation de la masse et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_i = 0 \quad (1)$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \mathbf{V}_i \right) = -\nabla P_i + \rho_i \mathbf{g} \mathbf{k} + \mu_i \Delta \mathbf{V}_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \cdot \nabla T_i = \kappa \Delta T_i \quad (3)$$

où κ est la diffusivité thermique des deux fluides.

2.1 Solution de base

Le système est considéré initialement au repos, donc la vitesse est nulle, $\mathbf{V}_i = \mathbf{0}$. Le système d'équations s'écrit donc :

$$\mathbf{0} = -\nabla p_e + \rho_e \mathbf{g} \mathbf{k} \quad (4)$$

$$T_e = \frac{T_2 - T_1}{d} z + \frac{d_1}{d} (T_2 - T_1) + T_1 \quad (5)$$

où $d = d_1 + d_2$.

2.2 Analyse dimensionnelle

Nous avons adopté l'analyse adimensionnelle utilisée par Le Bars et Davaille [5]. Les variables adimensionnelles sont définies par : $(x^*, y^*, z^*) = (\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d})$; $T_i^* = \frac{T_i - T_1}{T_2 - T_1}$; $(u_i^*, v_i^*, w_i^*) = (\frac{u_i}{\vartheta}, \frac{v_i}{\vartheta}, \frac{w_i}{\vartheta})$; $t^* = \frac{t}{d/\vartheta}$; $p_i^* = \frac{p_i}{\rho_i \nu_i \vartheta / d}$ avec $\vartheta = \frac{\beta g \Delta T d^2}{\nu_2}$ est la vitesse de Stokes qui a été choisie comme échelle caractéristique de la vitesse

du problème. Par la suite, on enlève le signe (*) pour alléger l'écriture. Nous éliminons le terme de pression de l'équation du mouvement, en projetant sur l'axe vertical le rotationnel de l'équation de mouvement et nous utilisons la conservation de la masse pour obtenir le système suivant :

$$\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \Delta w_i}{\partial t} = \frac{\nu_i}{\nu_2} \Delta (\Delta w_i) + \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$(Ra \frac{\partial}{\partial t} - \Delta) T_i = Ra w_i \quad (7)$$

où Ra est le nombre de Rayleigh défini par : $Ra = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\kappa \nu_2}$ et Pr est le nombre de Prandtl défini par : $Pr = \frac{\nu_2}{\kappa}$. La solution du système (6)-(7) est cherchée en modes normaux en posant :

$$w_i(x, z, t) = w'_i(z) e^{iqx + st} \quad (8)$$

$$T_i(x, z, t) = T'_i(z) e^{iqx + st} \quad (9)$$

où $s = \sigma + i\omega$. La partie imaginaire de s , notée ω , est la vitesse de phase de la perturbation. Le taux de croissance temporel de la perturbation est σ , partie réelle de s . Dans le cadre de cette analyse, le système d'équations (6)-(7) est réduit au système suivant :

$$s \frac{Ra}{Pr} (D^2 - q^2) w'_i = \frac{\nu_i}{\nu_2} (D^2 - q^2)^2 w'_i - q^2 T'_i \quad (10)$$

$$(s Ra - D^2 + q^2) T'_i = Ra w'_i \quad (11)$$

où $D = \frac{d}{dz}$. Ce système est associé aux conditions aux limites suivantes :

Sur les parois :

$$w'_1 = w'_2 = 0 \quad (12)$$

$$D w'_1 = D w'_2 = 0 \quad (13)$$

$$T'_1 = T'_2 = 0 \quad (14)$$

en $z = -a, 1 - a$ avec $a = d_1/d$.

A l'interface :

$$w'_1 = w'_2 \quad (15)$$

$$D w'_1 = D w'_2 \quad (16)$$

$$\gamma (D^2 + q^2) w'_1 = (D^2 + q^2) w'_2 \quad (17)$$

$$s D (D^2 - 3q^2) (\gamma w'_1 - w'_2) = B q^2 w'_1 \quad (18)$$

$$T'_1 = T'_2 \quad (19)$$

$$D T'_1 = D T'_2 \quad (20)$$

où $B = \frac{\Delta \rho}{\beta \rho_o \Delta T}$ est le nombre de flotabilité. Le système (10)-(20) est résolu numériquement en utilisant la méthode spectrale de collocation de Chebychev qui est basée sur les points de collocation de Gauss-Laubatto. Nous

utilisons pour la réalisation de notre code, les matrices de différentiation établies dans [6].

3 RÉSULTATS ET DISCUSSION

Le code de calcul que nous avons élaboré, pour la résolution numérique, est validé après comparaison de nos résultats avec ceux dans [5]. Pour toute la suite, la configuration étudiée va représenter deux couches fluides de même profondeur, ce qui peut être traduit par un rapport des profondeurs $a = 0.5$, et nous ne nous intéresserons qu'au cas où le système est initialement stable, ce qui veut dire que la couche fluide inférieure sera la plus dense. Pour étudier l'effet du nombre de Prandtl, Pr , sur le seuil de convection oscillante, nous illustrons différentes courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs du nombre de Prandtl, en présence d'un saut de masse volumique, $B \neq 0$.

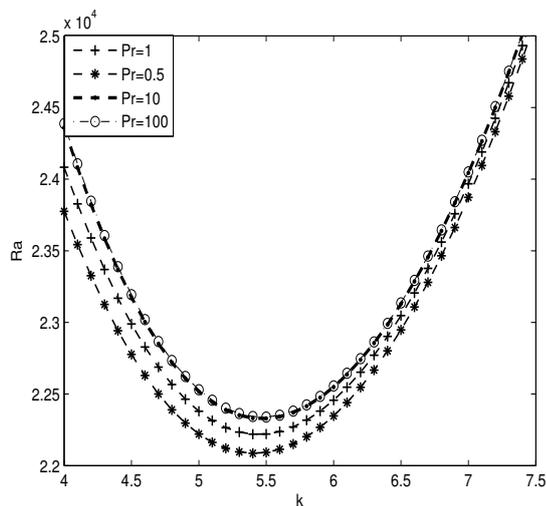


FIGURE 2 – Variation du nombre de Rayleigh en fonction du nombre d'onde pour différentes valeurs du nombre de Prandtl, en présence du saut de masse volumique, pour un rapport de viscosité, $\gamma = 6.7$, et pour un rapport des profondeurs, $a = 0.5$

Nous remarquons que le nombre de Rayleigh critique augmente avec le nombre du Prandtl. Nous mentionnons que le nombre d'onde critique ne dépend pas de ce nombre, $k_c = 5.36$. Pour mieux visualiser cette dépendance, nous montrons l'évolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Prandtl en présence du saut de masse volumique pour un rapport des viscosités égale à $\gamma = 6.7$. Nous notons ainsi que pour les fluides à grand nombre de Prandtl, le temps thermique est plus grand que le temps visqueux et que les processus de diffusion de la chaleur pilotent le mouvement du fluide. Pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl, les effets thermiques s'amenuisent et le comportement du fluide est essentiellement hydrodynamique.

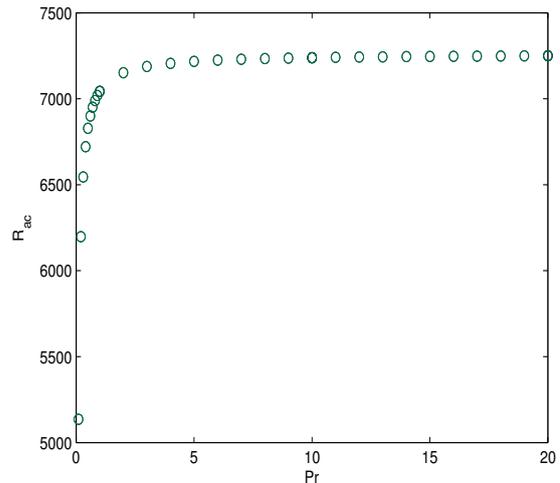


FIGURE 3 – Variation du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Prandtl, en présence du saut de masse volumique, pour un rapport de viscosité, $\gamma = 6.7$, et pour un rapport des profondeurs, $a = 0.5$

4 CONCLUSION

Notre étude a permis de mettre en évidence l'influence du nombre de Prandtl sur le seuil de convection, d'un système à deux couches fluides miscibles, confiné entre deux plaques planes horizontales qui sont maintenues à des températures uniformes. Les résultats numériques obtenus dans ce cadre montrent un effet stabilisant du nombre de Prandtl. Il est à noter que la dépendance du nombre de Prandtl, Pr , disparaît à partir d'une valeur typique de de l'ordre de $Pr = 100$, et dans ce cas, les effets inertiels deviennent alors négligeables.

<https://cmm2017.sciencesconf.org/>

Références

- [1] F. M. Richter, et C. E. Johnson, Stability of a chemically layered mantle. *J. Geophys. Res.* **79** (1974) 1635–1639.
- [2] P. Olson, and C. Kincaid, 1991 Experiments on the interaction of thermal convection and compositional layering at the base of the mantle. *J. Geophys. Res.* **96**, 4347-4354
- [3] P. Olson, P. G. Silver, et R. W. Carlson, 1990 The large scale structure of convection in the Earth's mantle. *Nature* **344**, 209-215.
- [4] P. J. Tackley, Mantle convection and plate tectonics : toward an integrated physical and chemical theory. *Science* **288** (2000) 2002–2007.
- [5] A. Davaille, *J. Fluid Mech.* Two-layer thermal convection in miscible fluids, *J. Fluid Mech.* (2002)
- [6] J. A. C. Weideman, S. C. Reddy, A MATLAB Differentiation Matrix Suite.