

## Modélisation du comportement dynamique des engrenages à dentures droits endommagés

**B. AJIM<sup>1</sup>, A.NAGUIB<sup>2</sup>, A. HACHIM<sup>2</sup>, Kh. ELHAD<sup>2</sup>**

1. Laboratoire Contrôle et Caractérisation Mécanique  
des Matériaux et des Structures (LCCMMS).  
Université Hassan II Casablanca, ENSEM, Route D'El Jadida,  
Casablanca 8118, Maroc  
[Ajim.brahim@gmail.com](mailto:Ajim.brahim@gmail.com)

2. Institut Supérieur d'Etudes Maritimes,  
Km7 Route d'El Jadida Casablanca Maroc  
[Abdelilah.hachim@gmail.com](mailto:Abdelilah.hachim@gmail.com)  
[Elhad\\_khalid@Hotmail.com](mailto:Elhad_khalid@Hotmail.com)

### Résumé

Le besoin incessant d'optimisation des engrenages nécessite de bien comprendre leur comportement dynamique. De plus l'analyse Vibratoire est considérée comme un domaine d'activité qui constitue une part toujours plus importante des dispositions permettant de rentabiliser l'instrument de production industriel, sans oublier l'influence de la lubrification au niveau du calcul des bilans de puissance. L'aspect dynamique est l'objectif de cette étude. Des approches théoriques pour simuler les vibrations d'engrènement dans les engrenages droits, sont présentées et discutées, pour analyser théoriquement le comportement vibratoire des engrenages, il existe des modèles linéaires et non linéaires qui permettent d'analyser la réponse dynamique de l'engrènement.

**Mots clefs :** *engrenage, vibration, aspect dynamique, modèles linéaire et non linéaire*

### 1. Introduction

Aujourd'hui, les engrenages occupent une place spéciale dans les systèmes mécaniques [1,3], c'est la façon la plus économique pour transmettre de la puissance en un mouvement de rotation dans des conditions uniformes, ils sont l'objet de nombreux travaux de recherche. Parmi l'ensemble des architectures possibles, les engrenages cylindriques en développante de cercle sont, sans conteste, les plus utilisés pour le transfert de rotation entre des axes parallèles car ils possèdent des géométries mathématiquement simples dont le contrôle dimensionnel est relativement aisé [4,5].

Le développement des nouvelles technologies, comme l'électronique a remplacé quelque application de

l'engrenage mais il reste toujours un élément mécanique dont l'utilisation croit continuellement [6].

Suites aux contraintes environnementales (masses embarquées et performances acoustiques en particulier), les engrenages modernes sont de plus en plus soumis à des exigences strictes en termes de capacité de charge, de rendement, de bruit et des vibrations développés, etc...

### 2. Développement mathématique d'un engrange droit avec défaut

#### 2.1 Modèle initial

Dans cette partie nous considérons un engrenage droit. Le modèle devient complexe avec un grand nombre de degrés de liberté (ddl). Dans notre modèle, Nous avons appliqué un système à huit degrés de liberté tel décrit dans la **figure 1**, Afin de focaliser l'étude sur la réponse vibratoire sur ce dernier.

Le comportement dynamique du support d'engrenages rigides et la contribution du support sont également considérés. Ainsi, Ce modèle simplifié qui sera ajusté avec le calcul de la réponse vibratoire.

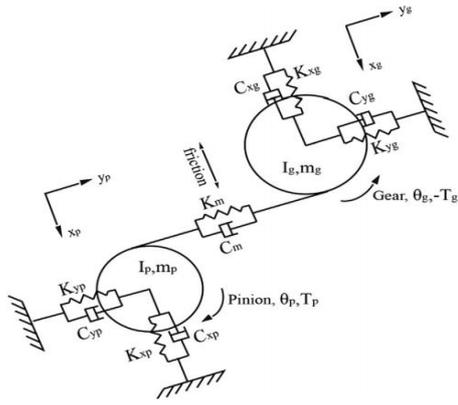


Figure1

Avec :

- $m_g$  : Masse de la roue [kg]
- $m_p$  : Masse du pignon [Kg]
- $j_g$  : Moment d'inertie de la roue [kg]
- $j_p$  : Moment d'inertie du pignon [kg]
- $c_{xg}$  : Coefficient d'amortissement de la roue [N.s / m]
- $c_{xp}$  : Coefficient d'amortissement du pignon [N.s/ m]
- $c_t$  : Coefficient d'amortissement de torsion [N.s / m]
- $c_m$  : Amortissement du contact [N.s / m]
- $k_{xg}$  : Coefficient de rigidité de la roue [N / m]
- $k_{xp}$  : Coefficient de rigidité du pignon [N / m]
- $k_t$  : Rigidité de torsion [N/ m]
- $k_m$  : Rigidité du contact [N / m]

## 2.2 Résultats et discussion

L'équation générale pour résoudre un système de huit degrés de liberté soumis à huit forces, en fonction des matrices de masse, L'amortissement et la raideur ayant une forme générale :

$$[A].\{\ddot{Y}\} + [B].\{\dot{Y}\} + [C].\{Y\} = \{F\}$$

**A, B et C** représentent respectivement la masse, l'amortissement et la raideur du système.

L'équation du mouvement, qui régit ce modèle de système, est la suivante:

$$m_g \ddot{x}_g + c_{xg} \dot{x}_g + k_{xg} x_g = \mu N$$

$$m_p \ddot{x}_p + c_{xp} \dot{x}_p + k_{xp} x_p = -\mu N$$

$$m_g \ddot{y}_g + c_{yg} \dot{y}_g + k_{yg} y_g = N$$

$$m_p \ddot{y}_p + c_{yp} \dot{y}_p + k_{yp} y_p = -N$$

$$m_g \ddot{z}_g + c_g \dot{z}_g + k_g z_g = 0$$

$$m_p \ddot{z}_p + c_p \dot{z}_p + k_p z_p = k_p z_p$$

$$j_g \ddot{\theta}_g + c_{t1} \dot{\theta}_g + k_{t1} \theta_g = -R_1 N + T_1$$

$$j_p \ddot{\theta}_p + c_{t2} \dot{\theta}_p + k_{t2} \theta_p = R_2 N - T_2$$

Avec

$$N = c_m [(R_g \dot{\theta}_g - R_p \dot{\theta}_p) + (y_p - y_g) \sin \alpha + (x_p - x_g) \cos \alpha] + k_m [(R_g \theta_g - R_p \theta_p) + (y_g - y_p) \sin \alpha + (x_g - x_p) \cos \alpha]$$

Ceci peut s'écrire en forme de matrice :

$$\begin{pmatrix} m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_g \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_g \\ \ddot{y}_p \\ \ddot{z}_g \\ \ddot{z}_p \\ \ddot{\theta}_g \\ \ddot{\theta}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{xg} + \mu c_m \cos \alpha & -\mu c_m \cos \alpha & \mu c_m \sin \alpha & -\mu c_m \sin \alpha & 0 & 0 & -\mu c_m R_g & \mu c_m R_p \\ -\mu c_m \cos \alpha & c_{xp} + \mu c_m \cos \alpha & -\mu c_m \sin \alpha & \mu c_m \sin \alpha & 0 & 0 & \mu c_m R_g & -\mu c_m R_p \\ \mu c_m \sin \alpha & -\mu c_m \sin \alpha & c_{yg} + \mu c_m \cos \alpha & -\mu c_m \sin \alpha & 0 & 0 & -\mu c_m R_g & \mu c_m R_p \\ -\mu c_m \sin \alpha & \mu c_m \sin \alpha & -\mu c_m \sin \alpha & c_{yp} + \mu c_m \cos \alpha & 0 & 0 & \mu c_m R_g & -\mu c_m R_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_p \\ -R_g c_m \cos \alpha & R_p c_m \cos \alpha & -R_g c_m \sin \alpha & R_p c_m \sin \alpha & 0 & 0 & c_{t1} + c_m R_g^2 & -R_g R_p c_m \\ R_p c_m \cos \alpha & -R_p c_m \cos \alpha & R_p c_m \sin \alpha & -R_p c_m \sin \alpha & 0 & 0 & -R_g R_p c_m & c_{t2} + c_m R_p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_g \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_g \\ \dot{z}_p \\ \dot{\theta}_g \\ \dot{\theta}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{xg} - \mu k_m \cos \alpha & \mu k_m \cos \alpha & \mu k_m \sin \alpha & -\mu k_m \sin \alpha & 0 & 0 & -\mu k_m R_g & \mu k_m R_p \\ \mu k_m \cos \alpha & k_{xp} - \mu k_m \cos \alpha & \mu k_m \sin \alpha & -\mu k_m \sin \alpha & 0 & 0 & \mu k_m R_g & -\mu k_m R_p \\ \mu k_m \cos \alpha & -\mu k_m \cos \alpha & k_{yg} + \mu k_m \cos \alpha & -\mu k_m \sin \alpha & 0 & 0 & -\mu k_m R_g & \mu k_m R_p \\ \mu k_m \cos \alpha & -\mu k_m \cos \alpha & \mu k_m \sin \alpha & k_{yp} - \mu k_m \cos \alpha & 0 & 0 & \mu k_m R_g & -\mu k_m R_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_p k_m \cos \alpha & R_p k_m \cos \alpha & -R_p k_m \sin \alpha & R_p k_m \sin \alpha & 0 & 0 & K_{t1} + K_m R_g^2 & -R_g R_p K_m \\ R_p k_m \cos \alpha & -R_p k_m \cos \alpha & R_p k_m \sin \alpha & -R_p k_m \sin \alpha & 0 & 0 & -R_g R_p K_m & K_{t2} + K_m R_p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ x_p \\ y_g \\ y_p \\ z_g \\ z_p \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution triviale de l'équation peut s'écrire:

$$A\ddot{Y} + B\dot{Y} + CY = F$$

On multiplie par  $A^{-1}$  :

$$\ddot{Y} + A^{-1}B\dot{Y} + A^{-1}CY = A^{-1}F$$

Pour terminer notre étude nous aurons besoin des paramètres concernant le système d'engrenages (pignon et roue) et les paramètres concernant la modalisation dynamique en utilisant les données suivante :

$$m_g = 2,5 \text{ kg}, m_p = 0,6 \text{ kg}$$

$$J_g = 0,0045 \text{ kg/m}^2, J_p = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2$$

$$R_g = 0,11 \text{ m}, R_p = 0,05 \text{ m}$$

$$K_{xg} = K_{xp} = K_{yg} = K_{yp} = 10^8 \text{ N/m}$$

$$K_{t1} = K_{t2} = 10^5 \text{ N.m/rad}$$

$$C_{xg} = C_{xp} = C_{yg} = C_{yp} = 1 \cdot 10^4 \text{ Ns/m}$$

$$C_{t1} = C_{t2} = 10 \text{ N.s/rad}$$

$$K_m = 0,9952 \text{ N/m}, C_m = 9,9072 \text{ N.s/m}$$

La matrice masse devient :

$$A = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,00026 \end{pmatrix}$$

Et la matrice d'amortissement:

$$B = \begin{pmatrix} 10000,56 & -0,056 & 0,02 & -0,02 & 0 & 0 & -0,0065 & 0,003 \\ -0,056 & 10000,56 & -0,02 & 0,02 & 0 & 0 & 0,0065 & -0,003 \\ 0,02 & -0,02 & 10000,056 & -0,02 & 0 & 0 & -0,0065 & 0,003 \\ -0,02 & 0,02 & -0,02 & 10000,056 & 0 & 0 & 0,0065 & -0,003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ -1,024 & 1,024 & -0,372 & 0,372 & 0 & 0 & 10,1198 & -0,054 \\ 4,652 & -4,652 & 0,1694 & -0,1694 & 0 & 0 & -0,054 & 10,024 \end{pmatrix}$$

La matrice raideur devient :

$$c \begin{pmatrix} 99999999,994 & 0,0056 & 0,0059 & -0,0059 & 0 & 0 & -0,0006 & 0,0029 \\ 0,0056 & 99999999,994 & 0,0059 & -0,0059 & 0 & 0 & 0,0006 & -0,0029 \\ 0,0056 & -0,0056 & 1000000,0056 & -0,0059 & 0 & 0 & -0,0006 & 0,0029 \\ 0,0056 & 0,0056 & 0,0059 & 99999999,994 & 0 & 0 & 0,0006 & -0,0029 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1028 & 0,1028 & -0,037 & 0,037 & 0 & 0 & 100000,012 & -0,0055 \\ 0,046 & -0,046 & 0,016 & -0,016 & 0 & 0 & -0,0055 & 100000,0025 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système nous devons calculer les valeurs propres de la matrice [L]

$$[L] = \begin{pmatrix} 0 & I \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont :

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0,0316 & \lambda_9 = 1,6180 \\ \lambda_2 = 0,0321 & \lambda_{10} = -0,6180 \\ \lambda_3 = -0,0316 & \lambda_{11} = -0,06180 \\ \lambda_4 = -0,0311 & \lambda_{12} = -0,6180 \\ \lambda_5 = 1,6180 & \lambda_{13} = -0,6180 \\ \lambda_6 = 1,6180 & \lambda_{14} = -0,6180 \\ \lambda_7 = 1,6180 & \lambda_{15} = 0 \\ \lambda_8 = 1,6180 & \lambda_{16} = 1 \end{array}$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ -q \end{pmatrix} = e^{Dt} + K$$

Tel que D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de la matrice L et k une constante

D'où le champ de vitesse pour chaque roue-pignon suivant les quatre directions (x, y, z,  $\theta$ ) sont :

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = e^{0,0316t} + K_1 \\ \dot{x}_2 = e^{0,0321t} + K_2 \\ \dot{y}_1 = e^{-0,0316t} + K_3 \\ \dot{y}_2 = e^{-0,0311t} + K_4 \\ \dot{z}_1 = e^{1,6180t} + K_5 \\ \dot{z}_2 = e^{1,6180t} + K_6 \\ \dot{\theta}_1 = e^{1,6180t} + K_7 \\ \dot{\theta}_2 = e^{1,6180t} + K_8 \end{array}$$

En intégrant ces résultats et en prenant en compte que les conditions initiales des vitesses sont nulles nous trouvons les déplacements :

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{0,0316}(e^{0,0316t} - 1) - t \\ x_2 = \frac{1}{0,0321}(e^{0,0321t} - 1) - t \\ y_1 = -\frac{1}{0,0316}(e^{-0,0316t} - 1) - t \\ y_2 = -\frac{1}{0,0311}(e^{-0,0311t} - 1) - t \\ z_1 = \frac{1}{1,6180}(e^{1,6180t} - 1) - t \\ z_2 = \frac{1}{1,6180}(e^{1,6180t} - 1) - t \\ \theta_1 = \frac{1}{1,6180}(e^{1,6180t} - 1) - t \end{array}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{1,6180}(e^{1,6180t} - 1) - t$$

Cependant les solutions dont les valeurs propres sont positives, sont les solutions qui divergent (solutions non acceptable), ce qui veut dire que les vibrations de la roue et du pignon ne sont pas détecté.

Donc les seules solutions acceptées sont :

$$\begin{array}{l} y_1 = -\frac{1}{0,0316}(e^{-0,0316t} - 1) - t \\ y_2 = -\frac{1}{0,0311}(e^{-0,0311t} - 1) - t \end{array}$$

D'après ces résultats nous constatons que les défauts sont générés au niveau l'axe y.

### 3. Conclusion

Pour l'entretien conditionnel préventif, l'analyse vibratoire s'avère un formidable outil pour l'industrie. Ce travail a permis de développer un modèle analytique qui simule le comportement vibratoire d'un engrenage endommagé.

Nous pourrions dire qu'en présence des défauts au niveau des dents du système d'engrenages, l'arbre de sortie et de l'entrée qui est connecté respectivement à la roue et au pignon effectuent une torsion autour de l'axe Y, ce qui est fort probable que ce système mécanique atteindra le mode de la rupture.

### Références

- [1] C. BENCHAAABANE, A. DJEBALA, N. OUELAA ET S. GUENFOUD *Diagnostic Vibratoire des Défauts d'Engrenages Basé sur les Indicateurs Scalaires*/22 janvier 2015
- [2] Palaisi D, Guilbault R, Thomas M, Lakis A. and Mureithi N. *Simulations numériques du comportement vibratoire d'engrenages Endommagés*, the 27th seminar on machinery vibration. CMVA October 2009, Vancouver
- [3] Carlos M. C. G. Fernandes, Pedro M. T. Marques, Ramiro C. Martins, Jorge H. O. Seabra *Gearbox power loss. Part II: Friction losses in gears* 2 December 2014
- [4] Parey, A., Tandon, N. 2003. *Spur gear dynamic models including defects: A review*. Shock and vibration Digest, 35(6), 465-478
- [5] Cousinard O et Marconnet P., Sept 2003, *Détection de l'endommagement d'un engrenage par l'emploi de l'analyse cepstrale et de la détection d'enveloppe : application et validation industrielles pour le diagnostic d'un réducteur fonctionnant à faible vitesse*, 16e congrès français de mécanique. 6p.
- [6] Bigret R., Feron J.-L. (1998) *Diagnostic, maintenance, disponibilité des machines tournantes*, Masson 1998.