Estimation et exploitation des matrices de souplesse dynamique en mécanique des structures

M. O. Dadah[1], M. H. Ait rimouch[1], M. A. Mousrij[2]

1. *Laboratoire de Physique des Matériaux, FST Béni Mellal, Université Sultan Moulay Slimane, BP 523 (Maroc)*
aitrimouch_h@yahoo.fr; omardadah8@gmail.com
2. *Laboratoire Ingénierie Mécanique-Management Industriel et Innovation, FST Settat Université Hassan Premier(Maroc)*

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à l'exploitation de la matrice de souplesse dynamique issue des mesures pour résoudre un certain nombre de problèmes en dynamique des structures. On exposera essentiellement une technique permettant de calculer la matrice de souplesse dynamique d'une structure ayant subie des modifications structurales, en se basant, uniquement, sur la connaissance des modifications introduites et des réponses fréquentielles relatives à la structure initiale (avant modification).

Les matrices de souplesse dynamique utilisées sont souvent évaluées :

- soit par reconstruction à partir des solutions propres identifiées,
- soit par mesure directe de tous ses éléments indépendants. Dans la pratique, on ne peut mesurer qu'un nombre limité de colonne de la matrice de souplesse dynamique. On propose, par la suite, une technique permettant de compléter cette matrice.

Un test de simulation numérique sera proposé pour valider les formulations proposées.

Mots clefs : *réponses fréquentielle, modification structurale, matrice de souplesse dynamique, reconstitution, analyse modal.*

1. Introduction

Dans le cadre d'optimisation des calculs en dynamique des structures on est souvent confronté à la résolution des problèmes de modifications structurales, de sous-structuration ou de rigidifications d'éléments. Dans la pratique la résolution ce base sur la connaissance de la matrice de souplesse dynamique $H(\omega)$. Cette matrice peut être calculée :

- soit à partir d'un modèle analytique ou numérique de simulation très proche de modèle réel ;
- soit à partir d'essais expérimentaux.

L'objectif est d'exposer une technique de modifications structurales basée sur les réponses fréquentielles. Et de proposer, après un rappel de la technique d'identification modale, une technique d'identification de la matrice de souplesse dynamique, de la structure avant modification, sans passer par l'identification modale.

2- PROBLEME DE MODIFICATIONS STRUCTURALES BASEES SUR LES REPONSES FREQUENTIELLES

Formulation générale

La structure modifiée peut être représentée par un assemblage de deux sous-systèmes : la structure initiale et un système additionnel constitué par la modification introduite.

La relation liant la solution particulière en régime harmonique à la matrice de souplesse dynamique de la structure initiale s'écrit :

$Z(s) = H(s)f,\quad s = j\omega$

où : $H(S) \in C^{c,1}$ vecteur déplacement à la pulsation ω

$f \in C^{c,1}$ vecteur des forces extérieures

$H(s) \in C^{c,c}$ matrice symétrique de souplesse dynamique de la structure initiale (abv. S.I.) à la pulsation ω

c nombre de capteurs placés sur la structure.

Pour alléger l'écriture, on omet par la suite l'argument s.

On découpe l'équation ci-dessus sous la forme :

$$\begin{pmatrix} z_i \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ii} & H_{ia} \\ H_{ai} & H_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ f_a \end{pmatrix} \quad (1)$$

où : l'indice a désigne les degrés de libertés (abv. ddl) affectés par la modification, et i désigne les autres ddl.

* La relation de souplesse de la $S.I.$ soumise aux forces de liaisons f_{al}, dues aux modifications introduites sur les ddl de type a s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \hat{z}_i \\ \hat{z}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ii} & H_{ia} \\ H_{ai} & H_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_i \\ \hat{f}_a \end{pmatrix} \quad (2)$$

où: $\hat{f}_i = f_i \in C^{c-a,1}$ et $\hat{f}_a = f_a + f_{al} \in C^{a,1}$

La relation de raideur des modifications introduites s'écrit (après condensation sur les ddl de raccordement avec la $S.I.$):

$$\check{f}_{al} = \Delta Z_{aa} \hat{\check{z}}_a \in C^{a,1} \quad (3)$$

où : $\hat{\check{z}}_a$ est le déplacement des ddl du système additionnel sur les points de raccordement avec la S.I.

$\check{f}_{al}$ représente les forces extérieures exercées par la $S.I.$ sur la modification introduite.

ΔZ_{aa} matrice de raideur dynamique sur les ddl de type a.

$$\Delta Z_{aa} = \Delta K_{aa} + s^2 \Delta M_{aa} \in C^{a,a} \; ; \qquad s = j\omega \qquad (4)$$

Les matrices ΔK_{aa} et ΔM_{aa} ont la forme générale suivante:

$$\Delta K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta K_{aa} \end{pmatrix}; \Delta M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta M_{aa} \end{pmatrix}$$

Conditions de raccordement :

$$\hat{\check{z}}_a = \hat{z}_a; \quad \check{f}_{al} + f_{al} = 0 \qquad (5)$$

Après exploitation des équations (3) à (5), l'équation (2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \hat{z}_i \\ \hat{z}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ii} - H_{ia}\Delta Z_{aa} G H_{ai} & H_{ia}(I_a - \Delta Z_{aa} G H_{aa}) \\ G H_{ai} & G H_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ f_a \end{pmatrix} \qquad (6)$$

où $G = [I_a + H_{aa}\Delta Z_{aa}]^{-1}$ (7)

L'équation (6) permet d'exprimer la réponse forcée de la $S.M.$, à la pulsation ω, à partir de la matrice de souplesse dynamique de la $S.I.$ et de la matrice de raideur dynamique de la modification introduite. On peut ensuite accéder aux paramètres modaux de la structure modifiée en appliquant une méthode d'identification modale sur les réponses fréquentielles précédentes.

L'évaluation de la souplesse dynamique de la S.M., nécessite la détermination de la matrice $G(s)$. Le coût d'évaluation est fonction du nombre a de ddl affectés par les modifications structurales.

3- Identification de la matrice de souplesse dynamique

La résolution des problèmes de modifications structurales (par exemple) nécessite la connaissance de la matrice de souplesse dynamique de la S.I.. Cette dernière peut être estimée par déférentes manières.

3.1 Estimation à partir d'un modèle élément fini

En dynamique des structures mécaniques, les systèmes continus sont souvent discrétisés et représentés par des modèles constitués d'un nombre fini n de degrés de liberté (modèle éléments finis). Si on arrive à élaborer un modèle éléments finis recalé (très proche de modèle réel) représenté par ses matrices masse M, raideur K et amortissement B, alors la matrice de souplesse dynamique est calculée par la relation suivant :

$$H_{cc}(\omega) = (K + j\omega B - \omega^2 M)^{-1}$$

3.2 Estimation à partir des mesures

Dans le cas où les données sont issues des mesures, on est souvent forcé à opérer avec une sous-matrice réduite $H_{cc} \in C^{c,c}$ où c ($c \ll n$) représente le nombre limité de capteurs placés sur la structure testée.

Les éléments de $H_{cc}(\omega)$ sont généralement évalués :

- soit par reconstruction à partir des solutions propres identifiées,
- soit par mesure directe de ses c (c + 1)/2 éléments indépendants.

3.2.1 Reconstitution à partir des solutions propres identifiées

On peut exprimer la souplesse dynamique d'une structure dissipative discrétisée à n ddl par une combinaison linéaire de l'ensemble de ses 2n modes (Résolvante de Green) :

$$H(\omega) = Y(j\omega I - S)^{-1} Y^T + \bar{Y}(j\omega I - \bar{S})^{-1} \bar{Y}^T \qquad (8)$$

où: $Y \in C^{n,n}$; $S \in C^{n,n}$ et $H(\omega) \in C^{n,n}$ représentent respectivement la base modale, la matrice spectrale et la souplesse dynamique, à la pulsation ω, de la structure dissipative.

Dans une bande fréquentielle donnée, on peut avec une précision suffisante exprimer (8) de manière approximative par :

$$H(\omega) \cong H^s(\omega) + H^d(\omega) \qquad (9)$$

où $H^s(\omega)$; $H^d(\omega) \in C^{n,n}$ représentent respectivement la partie statique de $H(\omega)$ relative aux modes non identifiés et la partie de $H(\omega)$ relative aux modes identifiées.

$$H^d(\omega) = Y_1(j\omega I_m - S_1)^{-1} Y_1^T + \bar{Y}_1(j\omega I_m - \bar{S}_1)^{-1} \bar{Y}_1^T \qquad (10)$$

où : $Y_1 \in C^{n,m}$; $S_1 \in C^{m,m}$ représente la sous-base modale, identifiée, de la structure dissipative.

L'introduction de la partie statique, $H^s(\omega)$, de $H(\omega)$ est introduite afin de compenser partiellement les $n - m$ modes non identifiés. Cette compensation a un rôle important dans les régions extérieures aux résonances de $H^d(\omega)$, régions où les contributions statiques des modes tronqués jouent un rôle prépondérant.

Dans les cas pratiques, on n'exploite fréquemment que la sous-matrice $H_{cc} \in C^{c,c}$ calculée ou mesurée ($c \ll n$). L'équation (4.2) s'écrit alors :

$$H_{cc}(\omega) \cong H^s_{cc}(\omega) + H^d_{cc}(\omega) \qquad (11)$$

avec:

$$H^d_{cc}(\omega) = Y_{1c}(j\omega I_m - S_1)^{-1} Y_{1c}^T + \bar{Y}_{1c}(j\omega I_m - \bar{S}_1)^{-1} \bar{Y}_{1c}^T$$

$Y_{1c} \in C^{c,m} (m < c)$ est la sous-base modale identifiée sur les c capteurs.

La construction de $H_{cc}(\omega)$ nécessite l'identification des matrices: Y_{1c}, S_1 et $H^s_{cc} \in C^{c,c}$. Pour identifier Y_{1c} et S_1 quelques p ($p < c$) colonnes ou quelques lignes de $H_{cc}(\omega)$ suffisent (dans le cas limite une colonne ou une ligne suffisent). A titre d'exemples, on peut citer comme référence de méthodes d'identification modale : la méthode dite de lissage linéaire [1] et la méthode globale [2].

Le problème est que pour la matrice de résidu statique H^s_{cc} on ne peut identifier que p colonnes. L'information manquante peut induire quelques effets sur les colonnes inconnues de $H_{cc}(\omega)$, surtout dans les régions où les termes résiduels ont un rôle prépondérant. Pour contourner ce problème et celui de l'extraction des solutions propres nous nous intéressons à la reconstitution directe de la souplesse dynamique $H_{cc} \in C^{c,c}$ à partir de la connaissance d'une sous-matrice $H_1 \in C^{c,p}$ de H_{cc}.

3.2.2 Reconstitution par mesure directe de la souplesse dynamique

Dans ce cas, on prend en compte la contribution de tous les modes de la structure. La connaissance totale de $H_{cc}(\omega)$ nécessite c capteurs et c excitations. En pratique, pour des raisons d'économie, on ne dispose que d'un nombre p ($p < c$) limité de configurations d'excitateurs linéairement indépendants. On n'observe donc alors que p colonnes de la matrice de souplesse $H_{cc}(\omega)$.

Problème: Connaissant p colonnes de H_{cc} notées $H_1 \in C^{c,p}$, estimons "au mieux" les $c - p$ colonnes restantes, sans passer par une identification modale.

On expose, dans ce qui suit, une technique qui permet de contribuer à la résolution de ce problème. Comme référence de méthodes similaires on peut citer [3], [4].

On partage la matrice de souplesse dynamique $H_{cc}(\omega)$ suivant le découpage en sous-matrices :

$$H_{cc} = (H_1 \quad H_2) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \tag{12}$$

où : $H_1 \in C^{c,p}$ connue

$H_{11} \in C^{p,p}$ sous-matrice carrée de H_1.

On ne considère ici que le cas où la matrice de souplesse dynamique est symétrique :

$H_{12} = H_{21}^T, H_{11} = H_{11}^T, H_{22} = H_{22}^T$ (système supposé auto-adjoint).

Dans ce cas le nombre d'éléments inconnus contenues dans la matrice H_{22} se réduit à $(c-p)*(c-p+1)/2$

a) Extension par factorisation régulière de Cholesky

Une factorisation régulière de Cholesky de H_{11} est une factorisation de la forme :

$$H_{11} = Q_{11}Q_{11}^T \tag{13}$$

où Q_{11} est une matrice triangulaire inférieure régulière.

Cherchons la matrice Q_{21} telle que :

$$\begin{pmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{pmatrix} Q_{11}^T \tag{14}$$

On en déduit:

$$T_{21} = H_{21}(Q_{11}^T)^{-1} \tag{15}$$

La souplesse dynamique reconstituée s'écrit ainsi :

$$H_{cc}^{rec} = \begin{pmatrix} Q_{11} \\ H_{21}(Q_{11}^T)^{-1} \end{pmatrix} (Q_{11}^T \quad (Q_{11}^T)^{-1}H_{21}) \tag{16}$$

Cette formulation peut être utilisée pour toute matrice symétrique.

L'inconvénient est la nécessité d'inverser la matrice Q_{11} à chaque fréquence de la bande analysée.

Pour contrôler le rang de H_{11}, il est préférable de passer par une décomposition en valeurs singulières.

b) Reconstitution par exploitation de la matrice H_1 aux fréquences de résonances

Les tests numériques traités montrent que dans la formulation précédente, la reconstitution au voisinage des fréquences de résonances est presque parfaite. D'où l'idée d'exprimer la souplesse dynamique, à une fréquence quelconque de la bande analysée, par une combinaison linéaire des souplesses dynamiques aux fréquences de résonances. Dans ce cas, il convient de :

- Chercher les fréquences de résonances,
- Calculer H_{cc} aux fréquences de résonances par l'éq. (16)
- Calculer H_{cc} dans toute la bande analysée.

L'idée consiste à chercher les coefficients $x_\nu(\omega) \in C, \nu = 1, \dots, m$ tels que :

$$H_1(\omega) = \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu(\omega)\, H_1(\omega_\nu) \tag{17}$$

où : m représente le nombre de modes identifiés dans la bande analysée ;

ω_ν la pulsation propre du $\nu^{ème}$ mode.

A partir de (17) et par une technique de moindres carrés on évalue les coefficients complexes $x_\nu(\omega)$ $(\nu = 1, \dots, m)$. La matrice de souplesse dynamique à estimer, à la pulsation ω, est exprimée par l'expression suivante :

$$H_{cc}(\omega) = \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu(\omega)\, H_{cc}(\omega_\nu) \tag{18}$$

où : $H_{cc}(\omega_\nu)$ représente la matrice souplesse dynamique, à la pulsation propre ω_ν, estimée à partir de l'éq. (16).

Pour résoudre (17) la condition nécessaire, mais non suffisante, à satisfaire est : $c*p \geq m$, en effet : le problème à résoudre est de la forme :

$$Ax(\omega) = b(\omega)$$

où : $A \in C^{c*p,m};\ x(\omega) \in C^m;\ b(\omega) \in C^{c*p}$

Dans une certaine mesure, plus le rappport $\frac{c*p}{m}$ augmente, meilleure est l'estimation de H_{cc}.

Dans l'équation (17), la matrice $H_1(\omega)$ a été représentée à partir des seuls modes de la bande analysée.

Conclusion :

L'objectif était d'exploiter les réponses fréquentielles, issues des mesures, pour résoudre certains problèmes de dynamiques des structures. On a proposé une formulation traitant le problème de modifications structurales. La qualité de la réanalyse est liée à la qualité de l'estimation des matrices de souplesses dynamiques de la structure initiale.

Les tests numériques permettent de conclure que la qualité de la matrice de souplesse dynamique, de la S.I., estimée est liée à la position des capteurs et des excitateurs; la valeur de l'amortissement de la structure; la densité spectrale.

Références

[1] R.FILLOD, J.PIRANDA, G.LALLEMENT : "*Identification des structures mécaniques linéaires et non linéaies"*, (1982) PP 234-241.

[2] R.FILLOD, G.LALLEMENT, J.PIRANDA, J.L.RAYNAUD :"*Gloabal method of identification"*, Vol.2 (1985) PP 1145-1151 .

[3] W.G. HALVORSEN, P.S.BARNEY, D.L.BROWN :"The U-vector expansion methode for modeling structural /acostic systems" Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference,San Diego, CA, USA, 1992, PP 584-590.

[4] H. AITRIMOUCH, G. LALLEMENT, J. KOZANEK, "Construction of the unobserved part of the square dynamic Flexibility Matrix", Journal of Sound and Vibration, Vol 204(1) (1997), p:73-84.