

PRÉDICTION DE LA STRICTION LOCALISÉE PAR UNE APPROCHE MICROMÉCANIQUE BASÉE SUR LA PLASTICITÉ CRISTALLINE

H.K. AKPAMA¹, M. BEN BETTAIEB^{1,2}, F. ABED-MERAIM^{1,2}

1. LEM3, UMR CNRS 7239 – Arts et Métiers ParisTech, 4 rue Augustin Fresnel, 57078 Metz Cedex 3, France

2. DAMAS, Laboratory of Excellence on Design of Alloy Metals for low-mAss Structures, Université de Lorraine, France

Résumé

Dans ce travail, un outil de modélisation théorique et numérique est développé pour prédire la localisation de la déformation dans les matériaux polycristallins. Les prédictions de striction localisée sont basées sur deux critères d'instabilités plastiques : la théorie de bifurcation et l'approche d'imperfection initiale. Le comportement à l'échelle du monocristal est formulé dans le cadre des grandes déformations élasto-plastiques, et un schéma de transition d'échelles de type auto-cohérent est utilisé pour déduire le comportement du polycristal. Les résultats en termes de courbes limites de formage (CLF) sont comparés, d'une part, entre les prédictions du modèle de Taylor et celles du schéma auto-cohérent et, d'autre part, entre les prédictions de l'analyse de bifurcation et celles de l'approche d'imperfection.

Mots clefs: *Instabilité, Bifurcation, Imperfection, Transition d'échelles, Courbe Limite de Formage*

1. Introduction

Dans le cadre des études de formabilité des tôles métalliques, les prédictions des instabilités plastiques ont captivé l'intérêt des chercheurs depuis plusieurs décennies. Malgré le nombre de contributions sur le sujet, la modélisation et le développement d'outils prédictifs fiables reste encore un domaine de recherche très actif. Dans ce contexte, le concept de Courbe Limite de Formage (CLF) a été introduit par Keeler et Backofen [1], et les premiers modèles de prédiction étaient basés sur une description phénoménologique du comportement du matériau. À ce titre, on peut citer Hill [2], qui a adopté un modèle rigide plastique isotrope pour la prédiction de la partie gauche de la CLF, et Marciniak et Kuczynski [3] qui ont introduit l'approche d'imperfection initiale. En dépit de leur utilisation très courante, les modèles phénoménologiques ne permettent pas de rendre compte précisément de certaines caractéristiques physiques essentielles du comportement du matériau, telles que les textures initiales et induites et autres paramètres microstructuraux (morphologie des grains, structure cristallographique ...). Pour remédier à ces limitations, une modélisation micromécanique avancée peut être adoptée, ce qui permet d'analyser l'impact des aspects microstructuraux sur la ductilité dans le but d'établir des liens microstructure-formabilité. C'est l'approche qui sera poursuivie dans cette étude

pour prédire les limites de formabilité des matériaux polycristallins.

2. Comportement du monocristal

La loi de comportement élasto-plastique locale du monocristal est donnée par la relation suivante qui relie le taux de contrainte nominale $\dot{\mathbf{n}}$ au gradient de vitesse \mathbf{g} via un module tangent \mathbf{l} :

$$\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{l} : \mathbf{g} \quad (1)$$

Les parties symétrique et antisymétrique de \mathbf{g} désignent, respectivement, le taux de déformation \mathbf{d} et le taux de rotation \mathbf{w} qui sont décomposés à leur tour en parties élastiques et plastiques :

$$\mathbf{g} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad ; \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad ; \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^p \quad (2)$$

Le glissement cristallographique est considéré comme la seule source d'écoulement plastique, ce qui se traduit par les relations suivantes :

$$\mathbf{d}^p = \sum_{\beta=1}^{N_s} \dot{\gamma}^\beta \text{sgn}(\tau^\beta) \mathbf{R}^\beta \quad ; \quad \mathbf{w}^p = \sum_{\beta=1}^{N_s} \dot{\gamma}^\beta \text{sgn}(\tau^\beta) \mathbf{S}^\beta$$

où $\dot{\gamma}^\beta$ est la valeur absolue de la vitesse de glissement sur le système de glissement β , N_s est le nombre total de systèmes de glissement, \mathbf{R}^β et \mathbf{S}^β sont les parties symétrique et antisymétrique du tenseur de Schmid et τ^β est la cission résolue (qui s'écrit $\tau^\beta = \mathbf{R}^\beta : \boldsymbol{\sigma}$, avec $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy).

En grandes déformations, et pour satisfaire le principe d'objectivité, la loi d'élasticité est écrite en termes d'une dérivée co-rotationnelle $\boldsymbol{\sigma}^\nabla$ de la contrainte de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma}^\nabla = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w}^e \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}^e = \mathbf{C}^e : \mathbf{d}^e \quad (3)$$

où \mathbf{C}^e est le tenseur d'élasticité du 4^{ème} ordre.

La loi de Schmid [4], qui gouverne l'écoulement plastique, implique que le glissement plastique est nul tant que la valeur absolue de la cission résolue reste inférieure à une cission critique τ_c^β . Ainsi, pour les systèmes de glissement actifs, la condition de cohérence s'écrit : $\dot{\gamma}^\beta > 0 \Rightarrow \tau^\beta \text{sgn}(\tau^\beta) - \tau_c^\beta = 0$. L'évolution de la cission critique est donnée par la loi d'écrouissage :

$$\dot{\tau}_c^\beta = h \sum_{\alpha=1}^{N_s} \dot{\gamma}^\alpha \quad ; \quad h = h_0 \left(1 + \frac{h_0 \Gamma}{\tau_0 n} \right)^{n-1} \quad ; \quad \Gamma = \sum_{\alpha=1}^{N_s} \dot{\gamma}^\alpha$$

La condition de cohérence, combinée avec les équations ci-dessus, permet d'obtenir les vitesses de glissement sur l'ensemble \mathcal{A} des systèmes actifs par la relation :

$$\dot{\gamma}^\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} M^{\beta\alpha} \text{sgn}(\tau^\alpha) \mathbf{R}^\alpha : \mathbf{C}^e : \mathbf{d} = \mathbf{y}^\beta : \mathbf{d}$$

où \mathbf{M} est l'inverse de la matrice \mathbf{P} définie par :

$$\mathbf{P}^{\alpha\beta} = \left(h + \text{sgn}(\tau^\alpha) \text{sgn}(\tau^\beta) \mathbf{R}^\alpha : \mathbf{C}^e : \mathbf{R}^\beta \right)$$

Finalement, en combinant ce qui précède, on obtient le module tangent élasto-plastique du monocristal par :

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}^e + \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{1} - {}^1\mathbf{A} - {}^2\mathbf{A} - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{sgn}(\tau^\alpha) \left(\mathbf{C}^e : \mathbf{R}^\alpha + \mathbf{S}^\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S}^\alpha \right) \otimes \mathbf{y}^\alpha$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur identité d'ordre 2 ; ${}^1\mathbf{A}$, ${}^2\mathbf{A}$ étant des tenseurs d'ordre 4 composés de termes convectifs en $\boldsymbol{\sigma}$:

$${}^1\mathbf{A}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \sigma_{ik} - \delta_{kj} \sigma_{il}) ; \quad {}^2\mathbf{A}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj})$$

3. Comportement du polycristal

Pour obtenir le comportement de l'agrégat polycristallin à partir de celui de ses constituants élémentaires (grains), le schéma de transition d'échelles incrémental auto-cohérent est adopté (voir Lipinski et al. [5]). La loi de comportement élasto-plastique du polycristal a la même forme que celle du monocristal (voir Eq. (1)) et permet de relier le taux de contrainte nominale macroscopique $\dot{\mathbf{N}}$ au gradient de vitesse macroscopique \mathbf{G} via un module tangent élasto-plastique global \mathbf{L} à déterminer :

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{L} : \mathbf{G} \quad (4)$$

Les tenseurs \mathbf{G} et $\dot{\mathbf{N}}$ sont définis comme les moyennes volumiques de leurs contreparties à l'échelle micro :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{g} dV \quad ; \quad \dot{\mathbf{N}} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\mathbf{n}} dV \quad (5)$$

Pour résoudre ce problème d'homogénéisation, on introduit les tenseurs de concentration \mathbf{A} et \mathbf{B} suivants :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{G} \quad ; \quad \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \dot{\mathbf{N}} \quad (6)$$

En combinant les équations (4)-(6), le module tangent macroscopique \mathbf{L} peut être exprimé sous la forme :

$$\mathbf{L} = \overline{\mathbf{I}(\mathbf{x}) : \mathbf{A}(\mathbf{x})} \quad (7)$$

où $\bar{\mathbf{a}}$ représente la moyenne volumique d'un champ de tenseur \mathbf{a} sur l'agrégat polycristallin. Sans entrer dans les détails des développements mathématiques élaborés qui font appel aux tenseurs de Green, il peut être démontré que le tenseur de concentration \mathbf{A}^I relatif au grain I est donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{A}^I = (\mathbf{I} - \mathbf{T}^{\text{II}} : (\mathbf{I}^I - \mathbf{L}))^{-1} : \overline{(\mathbf{I} - \mathbf{T}^{\text{II}} : (\mathbf{I}^I - \mathbf{L}))^{-1}}$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité d'ordre 4 et \mathbf{T}^{II} est le tenseur d'interaction relatif au grain I (en lien avec le tenseur d'Eshelby pour une inhomogénéité ellipsoïdale). Pour un polycristal à N_g grains, de fraction volumique respective f^I , la forme auto-cohérente à 1-site (au sens de Hill [6]) du module tangent élasto-plastique macroscopique est :

$$\mathbf{L} = \sum_{I=1}^{N_g} f^I \mathbf{A}^I : \mathbf{A}^I \quad (8)$$

L'ensemble des équations précédentes représente un problème fortement non-linéaire, qui sera résolu par une méthode itérative. À noter que le modèle de Taylor s'obtient comme cas particulier du modèle auto-cohérent en prenant pour tenseur de concentration $\mathbf{A}^I = \mathbf{I}$.

4. Critères de localisation des déformations

Les deux critères de localisation considérés dans cette étude (théorie de bifurcation et analyse d'imperfection) sont formulés en contraintes planes (tôles minces).

4.1 Théorie de bifurcation

Le critère de bifurcation est basé sur une perte d'unicité de la solution fondamentale homogène, qui se traduit par un saut du gradient de vitesse à travers une surface de discontinuité naissante (bande de localisation, Rice [7]). L'expression finale du critère de bifurcation s'exprime comme la singularité du tenseur acoustique donnée par :

$$\det(\bar{\mathcal{N}} \cdot \mathbf{L}^{\text{CP}} \cdot \bar{\mathcal{N}}) = 0 \quad (9)$$

où $\bar{\mathcal{N}}$ est le vecteur unitaire normal à la bande de localisation et \mathbf{L}^{CP} représente le module tangent élasto-plastique macroscopique exprimé en contraintes planes.

4.2 Approche d'imperfection initiale

Cette approche (notée M-K dans ce qui suit) est basée sur l'hypothèse de l'existence d'une imperfection initiale géométrique sous la forme d'une bande étroite à travers l'épaisseur de la tôle (voir illustration en Fig. 1).

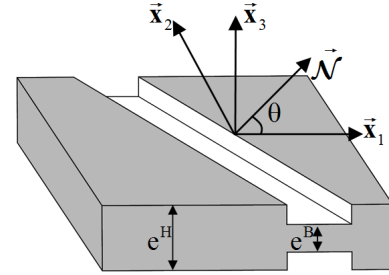


Fig. 1. Illustration de l'approche d'imperfection initiale.

L'évolution de l'orientation de la bande est donnée par :

$$\theta = \arctan \left[\tan \theta_0 \exp(1 - \rho) E_{11}^H \right] \quad (10)$$

où θ_0 est l'orientation initiale, E_{11}^H est la déformation logarithmique majeure à l'extérieur de la bande et ρ est le paramètre de trajet de chargement (i.e., $\rho = \dot{E}_{22}^H / \dot{E}_{11}^H$).

L'approche M-K est basée sur trois principales relations. La condition de compatibilité cinématique :

$$\mathbf{G}^B = \mathbf{G}^H + \dot{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathcal{N}} \quad (11)$$

L'équilibre à l'interface entre bande et zone homogène :

$$e^B \bar{\mathcal{N}} \cdot \dot{\mathbf{N}}^B = e^H \bar{\mathcal{N}} \cdot \dot{\mathbf{N}}^H \quad (12)$$

La loi de comportement définie dans chacune des zones :

$$\dot{\mathbf{N}}^B = \mathbf{L}^{\text{CPB}} : \mathbf{G}^B \quad ; \quad \dot{\mathbf{N}}^H = \mathbf{L}^{\text{CPH}} : \mathbf{G}^H \quad (13)$$

La combinaison de ces trois équations permet de calculer le vecteur d'amplitude du saut $\dot{\mathbf{C}}$ par la relation :

$$\dot{\mathbf{C}} = \left(\bar{\mathcal{N}} \cdot \mathbf{L}^{\text{PSB}} \cdot \bar{\mathcal{N}} \right)^{-1} \cdot \bar{\mathcal{N}} \cdot \left[\left(\frac{e^H}{e^B} \mathbf{L}^{\text{CPH}} - \mathbf{L}^{\text{CPB}} \right) : \mathbf{G}^H \right]$$

Le système d'équations non-linéaires ci-dessus est résolu par un schéma numérique itératif, et la striction localisée est détectée lorsque la déformation dans la bande est bien plus grande que celle prescrite à l'extérieur de la bande.

5. Prédications des CLF et comparaisons

Nous considérons ici un agrégat polycristallin constitué de 2000 grains. Les paramètres matériau relatifs au comportement monocristallin sont : $E=210$ GPa, $\nu=0,3$ (pour les paramètres d'élasticité), et $\tau_0 = 40$ MPa, $h_0=390$ MPa, $n=0,2$ (pour les paramètres d'écroutissage). La texture cristallographique initiale est prise orthotrope.

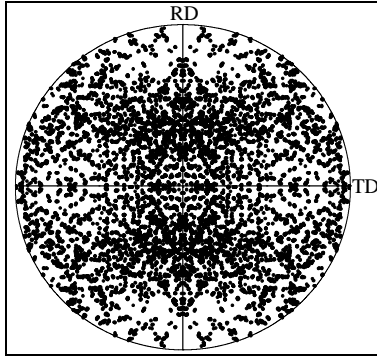


Fig. 2. Texture initiale : figure de pole {111}.

Dans la Fig. 3 ci-dessous, les courbes limites de formage (CLF) prédites par la théorie de bifurcation sont comparées à celles obtenues par l'analyse M-K (avec trois valeurs différentes d'imperfection initiale ξ_0) pour les deux schémas de transition d'échelles (modèle de Taylor et modèle auto-cohérent).

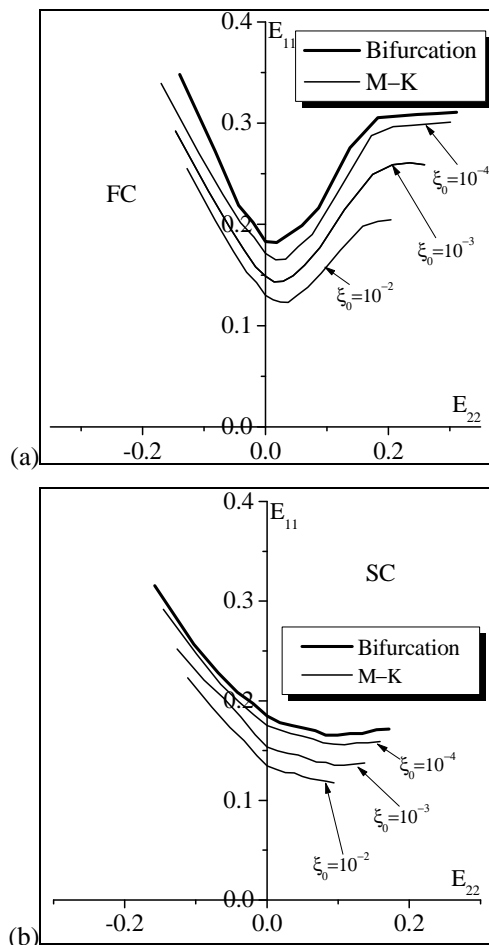


Fig. 3. CLF prédites par la théorie de bifurcation et l'analyse M-K en utilisant : (a) le modèle de transition d'échelles de Taylor, (b) le schéma auto-cohérent.

L'analyse des résultats de la Fig. 3 montre que, pour tous les trajets de chargement, les déformations limites prédites par la théorie de bifurcation représentent une borne supérieure à celles obtenues par l'analyse M-K. De plus, cette observation est valable quel que soit le schéma de transition d'échelles adopté (Taylor ou auto-cohérent). On démontre également que les CLF obtenues par l'analyse M-K tendent vers celles prédites par la théorie de bifurcation lorsque la taille de l'imperfection initiale tend vers zéro (voir aussi Ben Bettaieb et Abed-Meraim [8]). Ce dernier résultat est également vrai quel que soit le type de modèle d'homogénéisation utilisé.

6. Discussion et conclusions

Un outil de modélisation théorique et numérique a été développé pour prédire les CLF pour des tôles métalliques minces. Cet outil est basé sur le couplage d'un modèle micromécanique avancé avec deux critères de striction localisée. L'approche auto-cohérente a été adoptée pour déduire le comportement de l'agrégat polycristallin à partir de la connaissance du comportement des grains individuels. Pour les prédictions des déformations limites de l'agrégat polycristallin, la théorie de bifurcation et l'approche d'imperfection initiale ont été utilisées et comparées. Des simulations numériques variées ont été effectuées pour prédire les déformations limites et ainsi tracer les CLF associées. De ces prédictions numériques, il apparaît que la forme et aussi le niveau global des CLF sont tous deux sensiblement influencés par le schéma de transition d'échelles adopté. Il est également démontré que, lorsque la taille de l'imperfection initiale dans l'analyse M-K tend vers zéro, les CLF associées tendent vers celles prédites par la théorie de bifurcation.

Références

- [1] S.P. Keeler, W.A. Backofen, *Plastic instability and fracture in sheets stretched over rigid punches*, Trans. ASM 56 (1963) 25-48.
- [2] R. Hill, *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets*, J. Mech. Phys. Solids 1 (1952) 19-30.
- [3] Z. Marciniak, K. Kuczynski, *Limit strains in processes of stretch-forming sheet metal*, Int. J. Mech. Sci. 9 (1967) 609-620.
- [4] E. Schmid, W. Boas, *Plasticity of Crystals*, Chapman and Hall, London, 1935.
- [5] P. Lipinski, M. Berveiller, E. Reubrez, J. Morreale, *Transition theories of elastic-plastic deformation of metallic polycrystals*, Arch. Appl. Mech. 65 (1995) 291-311.
- [6] R. Hill, *Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids 13 (1965) 89-101.
- [7] J.R. Rice, *The localization of plastic deformation*, 14th Int. Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 1976, pp. 207-220.
- [8] M. Ben Bettaieb, F. Abed-Meraim, *Investigation of localized necking in substrate-supported metal layers: Comparison of bifurcation and imperfection analyses*, Int. J. Plast. 65 (2015) 168-190.