

RAPPROCHEMENT DES FONCTIONS DE FORME PAR LA METHODE D'INTERPOLATION RADIALE PAR POINT (MIRP)

Application sur fonctions 1D

A. MJIDILA¹, S. JALAL², Z. ELMASKAOUI³, L. BOUSSHINE⁴

1. LTCSI, ENSEM, Casablanca, mjidila@gmail.com

2. LTCSI, ENSEM, Casablanca, salah.eddine.jalal@gmail.com

Résumé :

La méthode des fonctions à base radiale (FBR) est un nouveau outil, très prometteur, d'interpolation des données multidimensionnelles. Elle est devenue très populaire pour certaines catégories d'applications, la cartographie, par exemple, le réseau neural, l'imaging médical et la résolution numérique des équations différentielles.

Dans ce papier on présente la méthode, son algorithme d'articulation et on termine par une application à une seule dimension à titre indicatif.

Mots clés : *Interpolation, analyse numérique, fonctions de forme, Méthode sans maillage.*

Introduction

Dans des cas fréquents on est demandé d'évaluer une fonction dont on ne se dispose que de ses valeurs sur un ensemble fini de points. Les cas simples des fonctions à une seule variable, ces points sont souvent disposés sur un réseau régulier unidimensionnel. Pour évaluer cette fonction en dehors de cet ensemble de points on procède par interpolation ou extrapolation selon la position du point où la fonction sera évaluée par rapport à l'ensemble des points donné. La mise en place d'une interpolation pour une fonction évaluée initialement sur un réseau de points consiste à optimiser la fonction approchante en utilisant l'ensemble des données. La figure 1 montre l'interpolation d'une droite par des polynômes de différents ordres.[1][2]

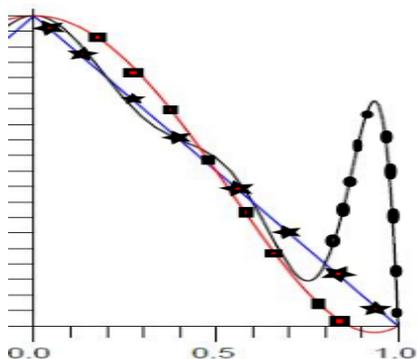


Fig. 1 Interpolation d'une droite (étoile) par des polynômes d'ordre 4 (carré) et d'ordre 10 (cercle).

Méthode d'interpolation par point (MIP)

La méthode d'interpolation par point se caractérise par la représentation de la fonction par des parties principales des séries Taylor. On considère une fonction $u(x)$ définie dans un domaine Ω , donné par un ensemble de nœuds, distribués à l'intérieur et sur la frontière. La méthode donne une approximation de la fonction en utilisant les valeurs nodales dans le domaine support du point d'intérêt x_Q . La formulation MIP propose les termes suivants:[1]

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n B_i(x) \times a_i(x_Q) \quad (1)$$

avec $B_i(x)$ sont les fonctions de base définies dans le repère cartésien et elles peuvent être multi-quadratiques (MQ) ou radiales (R), n est le nombre de nœuds dans le domaine support du point x_Q , et $a_i(x_Q)$ est le coefficient de la fonction de base correspondant au point donné x_Q [1]. La MIP présente plusieurs avantages par rapport autres méthodes, leur citation sort du cadre de ce papier.

Application sur fonction unidimensionnelle (1D)

Dans ce papier on se limitera à l'utilisation de la base radiale multi-quadratique (MQ) pour construire de la fonction approximative f^h de la fonctions f , de la même façon, l'approximation de sa première dérivées f'^h .

Étapes principales pour la construction de l'approximation

1. Choix d'un ensemble de points $x_i (i = 1, \dots, n)$ pour former le nuage de nœuds,
2. Détermination des matrices R_0 et P_0 selon les relations présentées dans la théorie spécialisée.
3. Résolution du système d'équations algébriques pour déterminer les vecteurs coefficients \mathbf{a} et \mathbf{b} ,

4. Choix d'un sous-ensemble de points arbitraires d'interpolation x_{Qj} , avec $(j = 1, \dots, n)$ à partir du nuage de nœuds,
5. Calcul des valeurs de la fonction et de sa dérivée à partir des polynômes d'interpolation de la fonction et de sa dérivée,
6. Calcul des valeurs exactes de la fonction et de sa dérivée,
7. Traçage des courbes à partir des valeurs calculées.

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.5705 \times 10^{-3} \\ 2.2830 \times 10^{-2} \\ -3.0361 \times 10^{-2} \\ 1.1759 \times 10^{-2} \\ -2.6774 \times 10^{-3} \\ 7.8321 \times 10^{-3} \\ -8.6108 \times 10^{-3} \\ 2.5773 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Exemple:

La fonction f est définie par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sin x$ et la dérivée $f'(x) = \cos x$.

En appliquant les étapes précédentes :

1. Choix du domaine à une seule dimension $[0,7]$, dans lequel on choisit un nuage de 8 nœuds équidistants.
2. Construction des matrices R_0 , par raison de simplification, on se limite à une fonction de base purement radiale sans termes d'augmentation P_0 .

Dans cette étape, les distances radiales entre chaque point d'intérêt choisi et chaque nœud du nuage par la relation sont déterminées. Les résultats de calcul sont donnés dans le tableau soit la distance:

$$r_i = x - x_i \quad (2)$$

avec x est la coordonnée du point d'intérêt et x_i est la coordonnée du nœud considéré du nuage.

Les éléments R_{ij} de la matrice R sont déterminés par la relation :

$$R_i(x) = (r_i^2 + R^2)^q \quad (3)$$

avec R et q , paramètres de forme choisis selon le cas étudié [1][6], ici on a pris $R = 0.1$ et $q = 2.5$. Le tableau 1 donne les distances radiales entre les points d'intérêt et les nœuds du nuage.

rayon r_i	Noeud	0	1	2	3	4	5	6	7
r_0	$x_{Q1} = 0$	0	1	2	3	4	5	6	7
r_1	$x_{Q1} = 1$	1	0	1	2	3	4	5	6
r_2	$x_{Q1} = 2$	2	1	0	1	2	3	4	5
r_3	$x_{Q1} = 3$	3	2	1	0	1	2	3	4
r_4	$x_{Q1} = 4$	4	3	2	1	0	1	2	3
r_5	$x_{Q1} = 5$	5	4	3	2	1	0	1	2
r_6	$x_{Q1} = 6$	6	5	4	3	2	1	0	1
r_7	$x_{Q1} = 7$	7	6	5	4	3	2	1	0

Tableau 1. Les distances radiales calculées

3. la résolution du système $\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{U}$ donne le vecteur-solution suivant :

4. Les points arbitraires d'intérêt sont pris du nuage donné $[0,7]$.

5. La fonction initiale peut donc être approchée par le polynôme :

$$f_1^h = (-5.5705 \times 10^{-3})((0-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + (2.2830 \times 10^{-2})((1-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + (-3.0361 \times 10^{-2})((2-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + (1.1759 \times 10^{-2})((3-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + (-2.6774 \times 10^{-3})((4-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + (7.8321 \times 10^{-3})((0-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + (-8.6108 \times 10^{-3})((0-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + (2.5773 \times 10^{-3})((0-x)^2 + 0.1^2)^{2.5}. \quad (5)$$

6. La figure 2 représente la fonction f et son rapprochement f^h .

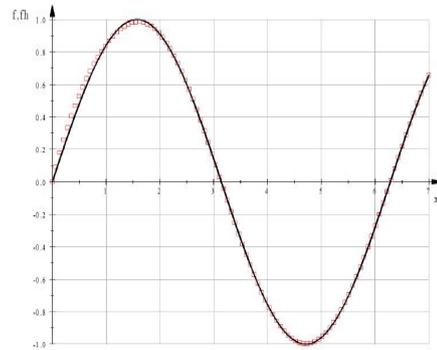


Fig. 2 Interpolation de la fonction $\sin x$ par la méthode MIRP.

La même procédure a été appliquée pour approcher la dérivée $f'_1 = \cos x$. Un système d'équations algébriques a été résolu pour donner le vecteur coefficient:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.4693 \times 10^{-3} \\ 1.3091 \times 10^{-2} \\ -2.2918 \times 10^{-2} \\ 9.4181 \times 10^{-3} \\ 1.4826 \times 10^{-2} \\ -3.7225 \times 10^{-2} \\ 2.4868 \times 10^{-2} \\ -5.5214 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Ce qui donne l'expression de rapprochement suivante:

$$\begin{aligned}
 f_1^h = & (-2.4693 \times 10^{-3})((0-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + \\
 & (1.3091 \times 10^{-2})((1-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + \\
 & (-2.2918 \times 10^{-2})((2-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + \\
 & (9.4181 \times 10^{-3})((3-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + \\
 & (1.4826 \times 10^{-2})((4-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + \\
 & (-3.7225 \times 10^{-2})((0-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + \\
 & (-8.6108 \times 10^{-3})((0-x)^2 + 0.1^2)^{2.5} + \\
 & (-5.5214 \times 10^{-3})((0-x)^2 + 0.1^2)^{2.5}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

La figure 3 représente la fonction f' et son rapprochement f^h .

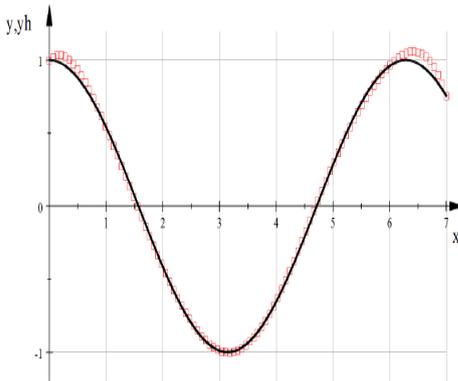


Fig. 3 Interpolation de la fonction $\cos(x)$ par la méthode MIRP.

Conclusion:

Par les résultats obtenus on peut juger facilement à quel point la méthode est précise même termes

d'augmentation P_0 . Cette méthode a trouvé emploi dans le rapprochement des fonctions de forme dans la méthode sans maillage (Meshless)[6].

References

- [1] G. R. Liu, Y. T. GU, *An introduction to Meshfree Methods and their programming*, Springer 2005.
- [2] A. Micchelli, *Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and conditionally positive definite functions*, Constr. Approx., 2:11-12,1986.
- [3] S. Rippa, *An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis interpolation*, Adv. Comput. Math., 11:193-210,1999.
- [4] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [5] A. Mjidila, *Contribution à la modélisation du Comportement Élastique des Solides par l'Approche de la Méthode Sans Maillage: Implémentation et Simulation Numérique*, PHD-Thesis, ENSEM, 2015.
- [6] A. Mjidila, S. Jalal, L. Bousshine, Z. Elmaskaoui, *Construction Of Shape Function By Radial Point Interpolation Method For 1d Case*, IOSRJEN, ISSN (e): 2250-3021, ISSN (p): 2278-8719, Vol. 04, Issue 11 (November. 2014), ||V2|| PP 23-35.