

# Analyse de la Vibration des plaques sandwiches en FGM utilisant un cœur rigide et homogène

Latifa Ould Larbi <sup>1,3</sup>, Lazreg Hadji <sup>2,3</sup>, Nafissa Zouatnia <sup>4</sup>

<sup>1</sup> Université Hassiba Benbouali de Chlef, Algérie.

<sup>2</sup> Département de Génie Civil, Faculté des Sciences Appliquées, Université Ibn Khaldoun, BP 78 Zaaroura, Tيارت, Algérie.

<sup>3</sup> Laboratoire des Matériaux & Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbes, 22000 Sidi Bel Abbes, Algérie.

<sup>4</sup> Laboratoire de Structures, Géotechnique et Risques, Université Hassiba Benbouali de Chlef, Algérie.

---

**Abstract** – Cet article utilise la théorie des plaques raffinées de quatre variables pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwiches à propriétés graduellement variées (FGM) utilisant un cœur rigide et homogène. La théorie présentée est de forme compatible et fortement similaire à la théorie classique des plaques dans plusieurs cotés. Elle n'exige pas des facteurs de correction de cisaillement, et donne lieu à des variations parabolique des contraintes de cisaillement transversale à travers l'épaisseur pour satisfaire les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieure et inférieure de la plaque. Les fréquences fondamentales sont trouvées par la résolution des problèmes aux valeurs propres. La théorie proposée est précise et simple dans la résolution du comportement de vibration libre des plaques sandwiches en FGM.

**Keywords:** Fréquence, Cœur rigide, Plaques sandwiches, Solution de Navier, Vibration libre.

---

## I. Introduction

Dans ce travail on étudié le comportement vibratoire des structures fonctionnellement graduées (plaques sandwiches), avec prise en compte de l'effet de cisaillement transverse, tout en assumant que les propriétés matérielles varient selon une loi de puissance suivant la direction transversale de la structure. Nous utilisons une théorie simple et raffinée de déformation de cisaillement transverse d'ordre élevé pour la réponse dynamique des plaques sandwiches en FGM avec cœur rigide et homogène. Les équations du mouvement seront obtenues en appliquant le principe d'Hamilton, Les fréquences fondamentales sont trouvées par la résolution du problème aux valeurs propres. La théorie proposée est précise et simple dans la résolution du comportement de vibration libre des plaques sandwiches en FGM en utilisant un cœur rigide et homogène.

## II. Théorie des Plaques Raffinées pour les Plaques Sandwiches à Gradient de Propriété

### II.1. Configuration géométrique

Prenons le cas d'une plaque sandwich FGM d'épaisseur uniforme, composée de trois couches hétérogènes voir la Fig.1, de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $h$ . Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à  $z = \pm h/2$ , et les bords de la plaque sont parallèles aux axes  $X$  et  $Y$ .

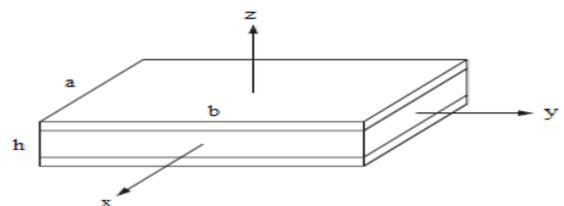


Figure 1. Géométrie de la plaque sandwich rectangulaire FGM.

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques, voir la Fig. 2, Les ordonnées verticales de ces

couches de bas vers le haut de la plaque sandwich FGM, sont désignées par  $h_1 = -h/2$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4 = h/2$ , respectivement.

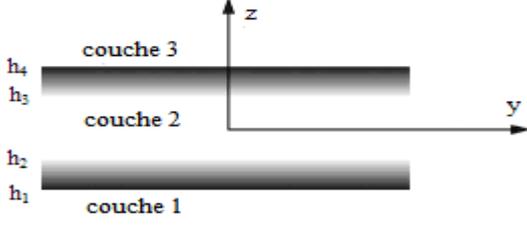


Figure 2. La variation de corps le long de l'épaisseur de la plaque sandwich FGM.

## II.2. Propriétés des matériaux

Les propriétés du FGM varient continuellement due au changement gradué de la fraction volumique des matériaux constitutifs (céramique et métal), généralement dans le sens de l'épaisseur. La fonction de loi de puissance est couramment utilisée pour décrire ces variations des propriétés des matériaux.

La fraction volumique du FGM est supposé varier suivant l'épaisseur de la plaque selon une fonction simple en loi de puissance :

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k \quad z \in [h_1, h_2] \quad (1a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (1b)$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k \quad z \in [h_3, h_4] \quad (1c)$$

Où,  $V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche  $n$ ;  $k$  est l'indice de puissance qui décrit le profil de variation des matériaux suivant l'épaisseur.

Les propriétés matérielles effectives, comme le module de Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$ , et la densité de masse  $\rho$ , peuvent être exprimées par une loi de mélange comme :

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)} \quad (2)$$

où  $P^{(n)}$  est la propriété matérielle effective du FGM de la couche  $n$ . Pour ce type de plaque,  $P_1$  et  $P_2$  sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et vice versa pour la couche 3 en fonction de la fraction de volume  $V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ );

## II.3. Cinématique et Équations Constitutives

Le champ de déplacement utilisé dans cette étude est le suivant :

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left( \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + z \left( \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (3)$$

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y).$$

Les déformations associées avec les déplacements dans l'équation (3) sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Où

$$f = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2, \quad g = \frac{5}{4} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \quad (5)$$

## II.4. Équations Gouvernantes

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dV \quad (6)$$

En intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque sandwich, l'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A [N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s + S_{yz}^s \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \gamma_{xz}^s] dx dy \quad (7)$$

Les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (10)$$

L'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho [\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2] dV = \frac{1}{2} \int_A I_0 [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)^2] dx dy \quad (11)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_2 \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{I_2}{84} \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton, qui peut être écrit comme :

$$0 = \int_0^t \delta (U_e - T) dt \quad (12)$$

En rassemblant les coefficients  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ , les équations du mouvement pour la plaque sandwich FGM résultantes sont :

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} \quad (13)$$

$$\delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right)$$

$$\delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_x^s}{\partial x} + \frac{\partial S_y^s}{\partial y} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right)$$

Équation (13) peuvent être exprimée en termes des déplacements ( $u, v, w_b, w_s$ ) en remplaçant les forces résultantes de l'équation (8). Pour la plaque de FGM, les équations d'équilibre (13) prennent la forme :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \quad (14a)$$

$$- B_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \quad (14b)$$

$$- B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad (14c)$$

$$+ B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$- D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$- D_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$+ (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \quad (14d)$$

$$- 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}$$

$$- 2(H_{12} + 2H_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}$$

$$+ A_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \nabla^2 \ddot{w}_b$$

### II.5. Solution de Navier pour une Plaque Sandwich sur Appuies Simples

Pour une solution analytique des équations (14), la méthode de Navier est utilisée pour une plaque sandwich FGM avec des conditions de bords spécifiques (appuyée - appuyée).

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites sont développées en séries de Fourier comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{nm} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i \omega t} \\ V_{nm} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i \omega t} \\ W_{bnm} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i \omega t} \\ W_{snm} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i \omega t} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Les équations, ci-dessous, des valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de  $m$  et  $n$ , pour le problème de vibration libre peut être écrite comme :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (16)$$

## III. Résultats Numériques et Discussions

Pour la plaque FGM Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

Céramique ( $P_1$ , alumine,  $Al_2O_3$ )

$$E_c = 380 \text{GPa}, \nu = 0.3 \text{ et } \rho_c = 3800 \text{kg/m}^3.$$

Métal ( $P_2$ , Aluminium,  $Al$ )

$$E_m = 70 \text{GPa}, \nu = 0.3 \text{ et } \rho_m = 2707 \text{kg/m}^3.$$

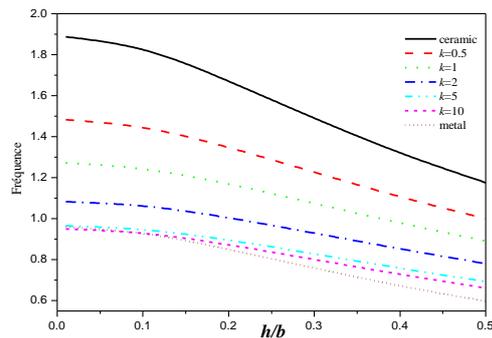
Le paramètre de fréquence naturelle adimensionnel est défini comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \quad (17)$$

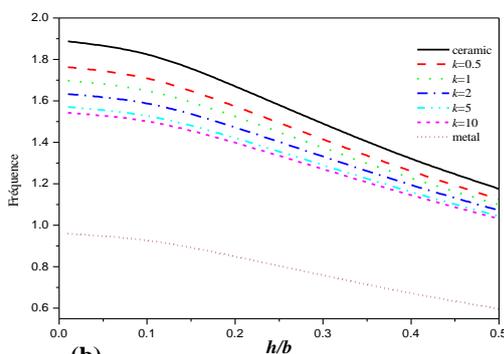
Où  $\rho_0 = 1 \text{kg/m}^3$ , et  $E_0 = 1 \text{GPa}$ .

La figure 3 montre les paramètres de fréquences fondamentaux en fonction du rapport épaisseur - côté des

plaques sandwiches P - FGM simplement appuyées avec un cœur rigide et homogène.



(a)



(b)

Figure 3. Fréquences fondamentales des plaques sandwiches P-FGM avec un cœur rigide et homogène : (a) plaque sandwich FGM 1-0-1, (b) plaque sandwich FGM 1-8-1.

Les fréquences sont maximales pour les plaques en céramiques et minimales pour les plaques en métal. On constate que les résultats augmentent lentement lorsque la quantité de la céramique augmente dans la plaque sandwich.

Il est montré que l'effet de l'indice  $k$  sur la plaque sandwich 1-0-1 sans la couche du cœur homogène, est plus grand que celle de sandwich 1-8-1 avec un cœur rigide et homogène.

#### IV. Conclusion

En conclusion, on peut dire que la théorie raffinée proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement des vibrations libres des plaques sandwiches en FGM. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque.

#### References

- [1] Bao. Young, G., Wang, L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. International Journal of Solids and Structures 32, 2853–2871 (1995).
- [2] Marur, P.R. Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials, PhD Thesis, Auburn University, Alabama (1999).
- [3] Li, Q., Iu, V.P., Kou, K.P. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. Journal of Sound and Vibration 311, 498–515 (2008).