

Transfert thermique par convection forcée de l'écoulement d'un fluide à loi de puissance dans un canal rectangulaire à parois épaisses soumises à une température sinusoïdale uniforme.

A. Yaya, K.ZNEYBER, A.OUBARRA, J.LAHJOMRY

Résumé :

Cet article, a pour but, l'étude analytique et l'analyse numérique des résultats obtenus lors d'un transfert thermique par convection forcée d'un écoulement de type Poiseuille d'un fluide à loi de puissance, dans un canal rectangulaire à parois épaisses, soumis à une distribution uniforme de température sinusoïdale et longitudinale de valeur moyenne non nulle. La dissipation visqueuse dans le fluide, est prise en compte tandis que la conduction axiale est négligeable. Le champ de température en régime permanent ainsi que le nombre de Nusselt local sont déterminés analytiquement. Le nombre Nusselt moyen est calculé numériquement en absence de la dissipation, ainsi des lois empiriques approximatives ont été établies. On représente aussi dans ce travail les influences de certains paramètres du problème sur le profil radial de la température et sur l'échange thermique entre le solide et le fluide.

Introduction :

La convection forcée trouve son importance dans de nombreuses applications surtout industrielles, précisément dans le dimensionnement des installations thermiques, et notamment dans les réacteurs nucléaires, les échangeurs de chaleur, les chaudières, les fours industriels, les capteurs solaires, le refroidissement des turbomachines et des composants électroniques et même dans les énergies renouvelables etc. Les premières études de la convection forcée laminaire dans les conduites, en hydrodynamique classique, ont été réalisées il y'a plus d'une centaine d'années par Graetz [1] en 1883—1885, et indépendamment de Nusselt en 1910. Ces études, connus sous le nom de problème de Graetz ou problème du développement du champ de température dans la région d'entrée thermique par les écoulements hydrodynamiquement établis, ont fait l'objet d'un nombre impressionnant de travaux de recherche (voir Shah et London [2] et Kakaç et al. [3]). Le problème de Graetz considère l'effet de la conduction axiale. L'objectif principal de ce travail est de mener une étude analytique en régime stationnaire et une analyse des résultats numériques

sur le transfert thermique par convection forcée laminaire de fluide à loi de puissance, dans un canal rectangulaire, qui est adiabatique en amont et soumis soudainement à une chaleur de forme sinusoïdale en aval, tenant compte des effets de la dissipation visqueuse dans le fluide et en négligeant l'effet de la conduction axiale, pour ce remède on considère que le nombre de Peclet est suffisamment grand (cas de plusieurs applications techniques), ce qui simplifie énormément la complexité du problème et la résolution de l'équation de l'énergie du fluide.

Formulation mathématique :

On considère deux plaques étanches, fixes, semi-infinies, parallèles, distantes de $2a$ et d'épaisseur chacune $h=b-a$, et ainsi disposées symétriquement par rapport à un axe d'écoulement z (au plan $y=0$). Les deux plaques sont soumises à une température sinusoïdale et exposées par leur entrée à un fluide non newtonien précisément un fluide à loi de puissance provenant de l'infini en régime établi. La symétrie du problème permet de réduire la région d'étude, donc il est possible de s'intéresser uniquement à la moitié du domaine à savoir $0 \leq y \leq a$ pour le fluide et $a \leq y \leq b$ pour le solide.

En supposant que l'écoulement est laminaire unidirectionnel, les paramètres thermo-physiques sont constants et que la conduction longitudinale au sein du fluide est négligeable et ainsi que la seule puissance interne du fluide est celle due aux contraintes visqueuses et aussi que le régime est stationnaire dans les deux régions (fluide, solide), et que le fluide est incompressible, et aussi en introduisant l'hypothèse phénoménologique de Fourier, les équations d'énergie s'écrivent sous la forme suivante :

$$\rho c_p u \frac{\partial T_f}{\partial z} = k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

Où ρ la masse volumique du fluide en $kg.m^{-3}$, c_p la chaleur spécifique en $J.kg^{-1}.K^{-1}$, k_f la conductivité thermique du fluide en $w.m^{-1}.K^{-1}$, et μ la viscosité dynamique du fluide en $Pa.s$ qui est donnée par la loi empirique d'Ostwald suivante :

$$\mu = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \quad (5)$$

Où m et n sont respectivement l'index et l'exposant de la loi de puissance, on note ici qu'ils n'ont pas d'interprétation physique claire en termes de paramètres microscopiques. En substituant (5) dans (4) l'équation d'énergie fluide devient :

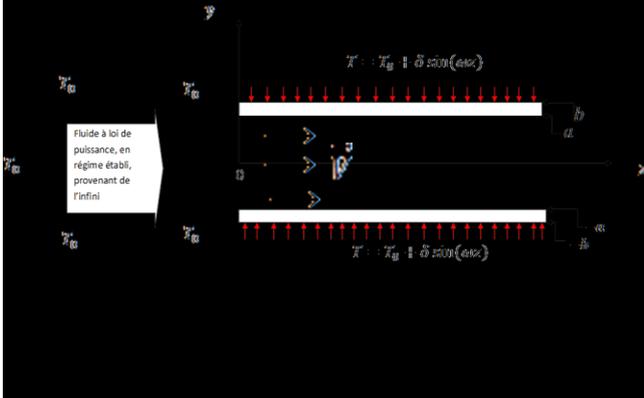
$$u \frac{\partial T_f}{\partial z} = \alpha_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{m}{\rho c_p} \left| \frac{du}{dy} \right|^{n+1} \quad (6)$$

Avec $\alpha_f = \frac{k_f}{\rho c_p}$ la diffusivité thermique du fluide en m^2/s . L'apparition du champ de vitesse dans l'équation de la chaleur nous met l'accent sur le couplage entre le thermique et la dynamique dans ce problème, ce qui nous ramène à

calculer ce champ afin de définir sous sa forme finale l'équation d'énergie fluide. Vu les hypothèses définies ci-dessus, le principe de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$d\left(\frac{F_r}{\Omega}\right) = dP \quad \text{où } \Omega \text{ la surface d'entrée, } P \text{ la pression et } F_r \text{ la force résistante de la plaque.}$$

Cela nous permet de trouver l'expression du champ de vitesse :



$$u = u_{max} \left(1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right) \quad (7)$$

$$\text{Telle que : } u_{max} = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n}} a^{\frac{n+1}{n}}$$

D'où l'équation de l'énergie fluide :

$$u_{max} \left(1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right) \frac{\partial T_f}{\partial z} = \alpha_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{m}{\rho c_p} \left(\frac{(n+1)u_{max}}{na}\right)^{n+1} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (8)$$

On ferme le problème en ajoutant aux équations (2) et (8) les conditions aux limites qui sont définies par la continuité des grandeurs physiques et la configuration géométrique du problème :

$T_f(z, a) = T_s(z, a)$, continuité de la température à l'interface solide-fluide.

$k_f \frac{\partial T_f(z, a)}{\partial y} = k_s \frac{\partial T_s(z, a)}{\partial y}$, continuité du flux thermique à l'interface solide-fluide.

$$\frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \text{ par symétrie.}$$

On pose : $U = \frac{u}{u_{max}}$, $\eta = \frac{y}{a}$, $\xi = \frac{z}{a}$, et $\theta = \frac{T-T_0}{\delta}$, alors les équations (8) et (2) s'écrivent sous leur forme adimensionnelle suivante :

$$Pe \left(1 - \eta^{\frac{n+1}{n}}\right) \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} = Br \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n+1} \eta^{\frac{n+1}{n}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \xi^2} = 0 \quad (10)$$

Où $Pe = \frac{U_{max} \gamma_0}{\alpha}$, le nombre de Peclet il est sans dimension considéré ici assez grand pour pouvoir négliger l'effet de la conduction axiale dans le fluide quant à $Br = \frac{m U_{moy}^{n+1}}{k_f \delta a^{n-1}}$, le nombre de Brinkman représentant le rapport entre l'énergie des forces visqueuses dissipée et l'énergie transférée par conduction thermique.

Les conditions aux limites adimensionnées :

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (9-a)$$

$$\theta_f(\xi \geq 0, 1) = \theta_s(\xi \geq 0, 1) \quad (9-b)$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = \gamma \frac{\partial \theta_s}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \quad \text{où } \gamma = \frac{k_s}{k_f} \quad (9-c)$$

$$\theta_s(\xi \geq 0, e) = \sin(\omega \xi) \quad (10-c)$$

où $e = \frac{b}{a}$ et $\omega = a\beta$ est la fréquence adimensionnelle.

Solution analytique :

On donne ici la solution analytique de l'équation d'énergie fluide pour quelques valeurs de l'index n ($n \in \{1, 2, 3, 4\}$). La solution de l'équation (9) peut s'écrire comme la somme de deux solutions l'une est particulière $\theta_p(\eta)$ et l'autre est homogène $\theta_H(\xi, \eta)$. En remplaçant $\theta_p(\eta)$ dans l'équation (9) on trouve après deux intégrales :

$$\theta_p(\eta) = -\frac{nBr}{3n+1} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \eta^{\frac{3n+1}{n}} + k_1 \eta + k_2 \quad (11)$$

Où k_1 et k_2 sont des constantes. Les conditions (9-a) et (9-b) nous permettent d'écrire :

$$\theta_p(\eta) = \frac{nBr}{3n+1} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(1 - \eta^{\frac{3n+1}{n}}\right) \quad (12)$$

On peut démontrer par la méthode des variables séparées que la solution homogène peut être sous la forme :

$$\theta_H(\xi, \eta) = \theta_{0,f}(\eta) + \theta_{1,f}(\eta) \sin(\omega \xi) + \theta_{2,f}(\eta) \cos(\omega \xi) \quad (13)$$

Où $\theta_{0,f}(\eta)$, $\theta_{1,f}(\eta)$ et $\theta_{2,f}(\eta)$ sont des fonctions que l'on définira.

De même la solution (10) est de la forme :

$$\theta_s(\xi, \eta) = \theta_{0,s}(\eta) + \theta_{1,s}(\eta) \sin(\omega \xi) + \theta_{2,s}(\eta) \cos(\omega \xi) \quad (14)$$

En remplaçant (13) respectivement (14) dans (9) sans second membre respectivement (10), ainsi en exploitant les conditions aux limites (9) et (10-c), on démontre que :

$$\theta_{0,f}(\eta) = C^{te} = \frac{Br}{\gamma} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n (e-1) \quad (15)$$

$$\theta_{0,s}(\eta) = \frac{Br}{\gamma} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n (e-\eta) \quad (16)$$

Pour déterminer on les rassemble en une seule fonction complexe telle que: $\psi(\eta) = \theta_1 + j\theta_2$

Ce qui donne d'après les équations l'équation (17) :

$$\psi_f''(\eta) - j\omega P_e \left(1 - \eta^{\frac{n+1}{n}}\right) \psi_f(\eta) = 0 \quad (17)$$

Avec les conditions :

$\psi_f'(0) = 0$, (17-a) ; $\psi_f(1) = \psi_s(1)$, (17-b) d'après (9-b).
De même, selon les équations (14) et (10), on a :

$$\psi_s''(\eta) - \omega^2 \psi_s(\eta) = 0 \quad (18)$$

Avec :

a) $\psi_s(1) = \psi_f(1)$; b) $\psi_s(e) = 1$

La solution de (18) est donnée par : $\psi_s(\eta) = B_1 e^{-\omega\eta} + B_2 e^{\omega\eta}$ où B_1 et B_2 sont des constantes à déterminer.

Par la méthode de Frobenius on peut démontrer que la solution de (17) peut s'écrire sous forme d'un développement en série :

$$\psi_f(\eta) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i \eta^i \quad (19)$$

Remplacer (19) dans (17) permet de trouver les A_i . On trouve alors tous les autres coefficients en fonction de A_0 , ce qui donne :

$A_1 = 0, A_2 = \frac{j\omega P_e}{2} A_0, A_3 = 0$, et pour $p \geq 3$, on a :

$$A_{p+2} = \frac{j\omega P_e (A_p - A_{p-3})}{(p+1)(p+2)} \quad (20)$$

De même pour les trois autres valeurs de n on aura après le calcul : $A_p = \frac{j\omega P_e (A_{2p-2} - A_{2p-4})}{2p(2p-1)}, \forall p \geq 2, n = 1$,

$$A_{p+2} = \frac{j\omega P_e (A_p - A_{p-4})}{(p+1)(p+2)}, \forall p \geq 4, n = \frac{1}{3},$$

$$\text{et } A_{p+2} = \frac{j\omega P_e (A_p - A_{p-5})}{(p+1)(p+2)}, \forall p \geq 5, n = \frac{1}{4}$$

On peut regrouper les six premiers coefficients pour les quatre valeurs de n dans le tableau suivant :

n	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1/2	0	$\frac{j\omega P_e}{2} A_0$	0	$\frac{(j\omega P_e)^2}{24} A_0$	$-\frac{j\omega P_e}{2}$	$\frac{(j\omega P_e)^3}{720} A_0$
1	0	$\frac{j\omega P_e}{2} A_0$	0	$\frac{j\omega P_e}{12} \left(\frac{j\omega P_e}{2}\right)^2$ $1A_0$	0	$\frac{(j\omega P_e)^2}{60} \left(\frac{j\omega P_e}{12} - \frac{j\omega P_e}{2}\right)$ $76A_0$
1/3	0	$\frac{j\omega P_e}{2} A_0$	0	$\frac{(j\omega P_e)^2}{24} A_0$	0	$\frac{j\omega P_e}{30} \left(\frac{j\omega P_e}{24} - \frac{j\omega P_e}{2}\right)$ $1A_0$
1/4	0	$\frac{j\omega P_e}{2} A_0$	0	$\frac{(j\omega P_e)^2}{24} A_0$	0	$\frac{(j\omega P_e)^3}{720} A_0$

Et d'après (17-b) et (18-a) et (18-c), on détermine les constantes B_1 et B_2 :

$$B_1 = \frac{e^{\omega(1-e)} - A_0 [1 + \sum_{i=1}^{\infty} V_i]}{e^{\omega(1-2e)} - e^{-\omega}} \quad \text{et} \quad B_2 = \frac{e^{\omega(e-1)} - A_0 [1 + \sum_{i=1}^{\infty} V_i]}{e^{\omega(2e-1)} - e^{\omega}}$$

où: $A_0 = \frac{S}{C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i V_i}, V_i = \frac{A_i}{A_0}, C_i = i + S \text{ et } S = \frac{\gamma\omega}{sh(\omega(e-1))}$

Analyse et discussion des résultats numériques :

On discute dans ce paragraphe les effets de certains paramètres du problème sur le profil radial de la température et sur l'échange thermique étudié :

Effet de l'épaisseur :

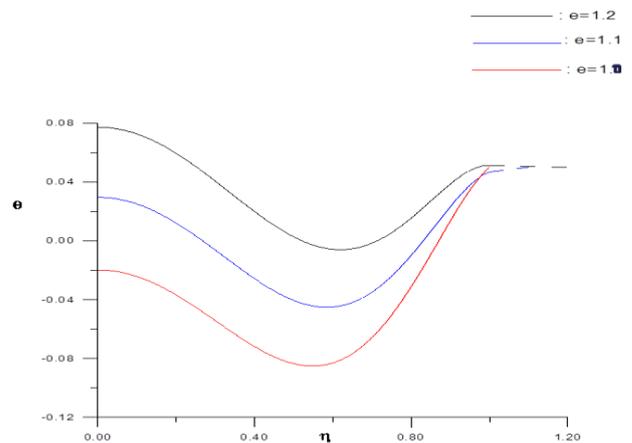


FIG. III.3: Profils de température pour des différentes valeurs de l'épaisseur des parois avec: $\omega=0.1, Pe=100, Br=0.5, n=0.5, \gamma=3, \zeta=0.5$

On constate d'après ce graphe que sur une section donnée ($\xi = cte$), plus l'épaisseur e est petite plus la température du fluide diminue cela peut être interprété physiquement par le fait que l'échange thermique avec l'extérieur est plus favorisé, et on remarque aussi l'apparition d'un minimum dont la position se déplace vers la droite quand l'épaisseur augmente, et ce qui concerne le solide, l'effet de e est beaucoup moins important.

Effet de la fréquence d'échauffement :

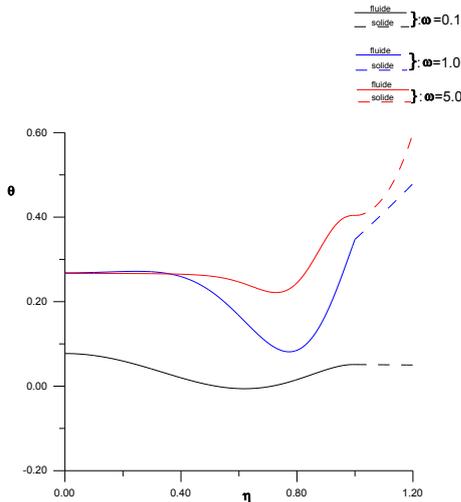


FIG.III.4: Profils de température radiale adimensionnelle selon différentes valeurs de omega avec: Pe=100, n=0.5, e=1.2, Br=0.5, gamma=3, xi=0.5

On remarque dans la figure ci-dessus que la température augmente pour le solide et aussi pour le fluide quand la fréquence augmente. Sur une section et près de l'axe de l'écoulement la température demeure quasi-constante pour des valeurs de ω plus importantes, et loin de l'axe du canal on voit un décroissement du profil thermique et des minimums qui dépendent fortement de ω , puis la température du fluide augmente rapidement pour atteindre celle du solide à $\eta = 1$. On constate aussi que les deux températures varient légèrement pour des valeurs de ω relativement petites. Néanmoins, pour le solide, l'augmentation est exponentielle pur des hautes fréquences et ceci conformément à la solution de (18).

Effet de l'index n :

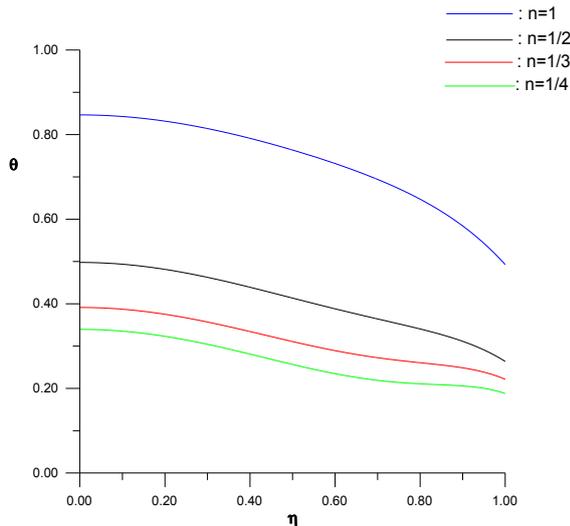


FIG.III.6: Effet de n sur le profil thermique radial pour Br=0.5, xi=0.5, omega=0.1, e=1.2 et Pe=100

On remarque sur ce graphe qu'en présence de la dissipation visqueuse ($Br \neq 0$), la température diminue toujours au fur et à mesure que l'index n décroît. On peut interpréter ce résultat par le fait que le fluide s'échauffe plus quand il est plus épais à cause des effets de la viscosité.

Effet de gamma :

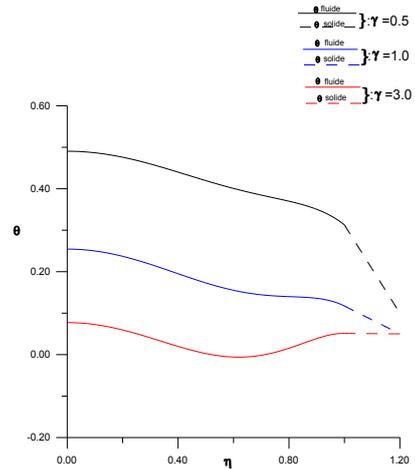


FIG.III.2: Profils de température adimensionnelle radiale pour différentes valeurs de gamma avec: omega=0.1, Pe=100, e=1.2, Br=0.5

Sur ce graphe, on lue que plus γ est grand plus la température du fluide est faible, car dans ce cas le transfert de chaleur dans le solide est plus favorisé et on remarque qu'il y a aussi un refroidissement du fluide. La température décroît plus vite avec η pour γ petit car dans ce cas le transfert vers l'extérieur est moins important.

Par un calcul analytique et un autre numérique, on dresse les tableaux suivants et simule l'expression de Nu moyen pour $Br=0$ par :

$$\overline{Nu} = 4 \frac{B \times E + C \times F}{2 \times E + 2 \times F}$$

où les B, C, E et F sont définies dans le paragraphe III-2-1.

n	1/4	1/3	1/2	1
\overline{Nu}	9.4780824	9.1687001	8.7729184	8.2465584
	64	80	68	48

Tableau 3 : Valeurs de Nusselt moyen pour différents n au cas où $\omega = 0,015$, $Pe = 100$, $\gamma = 0,5$ ou 3 , $e = 1.2$, $Br = 0$.

On remarque d'après le tableau ci-dessus que le Nu moyen augmente légèrement pour une valeur petite de la fréquence ω au fur et à mesure que n diminue, indépendamment de γ . Et dans le tableau ci-dessous, on constate la même évolution de Nu moyen, sauf que son augmentation devient importante pour des valeurs de ω relativement grandes par rapport à celle du tableau ci-dessus, indépendamment de γ aussi.

N	1/4	1/3	1/2	1	
\overline{Nu}	48.36276544	45.16719868	41.31753220	9.09812	Solution dans l'article [9]
				9.098117313	Notre solution analytique divisée par 4*

Tableau 4 : Valeur de Nusselt moyen pour les quatre valeurs de n au cas où $\omega = 15$, $Pe = 100$, $\gamma = 0,5$ ou 3 , $e = 1,2$, $Br = 0$.

$$E_{r,\overline{Nu}} = \left| \frac{9.098117313 - 9.09812}{9.098117313} \right| = 3.297386 * 10^{-7}$$

Par le calcul ci-dessus, on trouve une erreur relative d'ordre de 10^{-7} , ce qui peut être considéré comme un bon accord.

***NB :** La division par 4 pour comparer avec le travail [9] qui n'a pas tenu compte du diamètre hydraulique dans la définition de Nusselt.

Conclusion :

L'objectif de ce travail était d'établir une résolution analytique de l'équation d'énergie, en régime permanent d'un fluide non newtonien (fluide à loi de puissance), et de développer une analyse sur l'influence de certains paramètres du problème sur le profil thermique radial et sur l'évolution du nombre de Nusselt et Nusselt moyen.

Les analyses ont montré avec certitude l'influence du processus thermique du solide sur celui au sein du fluide ; elles ont affirmé aussi l'alliance forte entre les parois intérieures du solide et le fluide sur les inter-limites des deux régions du système par la confirmation des conditions aux limites. Les données des tableaux du chapitre IV ont permis de conclure que, l'accroissance ou la décroissance de \overline{Nu} en fonction de la fréquence ω est indépendant du rapport de conductivités γ , et qu'il augmente toujours lorsque l'indice de consistance n diminue, c'est-à-dire lorsque le fluide devient de plus en plus rhéofluidifiant, et ceci indépendamment de γ aussi. Cela peut conduire à s'interroger, si la quantité et la qualité d'échange thermique étudié ne dépend que de la nature physique du fluide et de la fréquence d'échauffement de la paroi externe du solide et non jamais de la nature de ce dernier ? ou que le rapport de conductivité thermique de deux corps n'est jamais constant ou il admet une valeur critique ? ou que d'autres paramètres physiques régissant sur le processus d'échange thermique n'étaient pas pris en considération ?

Bibliographies

- [1] Brinkman HC. Heat effect in capillary flow I. Appl Sci Res 1951; A2:120-4.
- [2] L, Graetz, Ueber die Wärmelungofähigkeit Von Flüssigkeiten, Annalen der physik und Chemie 18, 97 (1885).
- [3] Shah, R., K., and London, A., L., Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Advances in Heat Transfer, Supplement 1, Academic Press, New York, (1978).
- [4] Kakaç, S., Shah, R., K., and Aung, W., Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, John Wiley and Sons New York, (1987).
- [5] Lahjomri, J, Thèse, Solutions analytiques du problème de la convection forcée des écoulements laminaires hydrodynamiquement établis dans la région d'entrée thermique des conduites.
- [6] K. Zniber, A. Oubarra, J. Lahjomri, Analytical solution to the problem of heat MHD flow inside a channel with prescribed sinusoidal wall heat flux, Energy Conversion and Management 46 (2005) 1147-1163.
- [7] A. Barletta, E. Zanchini: Laminar forced convection with sinusoidal wall heat flux distribution: axially periodic regime, Italy [9] Simmons, G, F: Differential Equations with applications and Historical Notes. New Delhi: Tata Mc Graw-hill, 1974, chap. 5.
- [8] Barletta A, Magyari E. Forced convection with viscous dissipation in the Thermal entrance region of a circular duct with prescribed wall heat flux. Int J Heat Mass Transfer 2007, 50: 26-35.
- [9] A. Barletta, E. Rossi di Schio, G. Comini, P. D'Agaro, Conjugate forced convection heat transfer in a plane channel Longitudinally periodic regime, Int. J. of thermal sciences 47 (2008) 43-51.

- [10] C. J. Hsu, Heat transfer in a round tube with sinusoidal wall heat flux distribution, *AIChE J.* 11 (1965) 690-695.
- [11] A. Barletta, E. Rossi di Shio, Periodic forced convection with axial conduction in a circular duct, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (2000) 2949-2960.
- [12] B. WEIGAND An exact analytical solution for the extended turbulent Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions for pipe and channel flows, 0017-9310(95)00266-9